Untersuchungen über abhängige Punktfiguren

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt

der Philosophischen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

zu **Bonn**

von

Hans Peters

aus Leverkusen

Großbetrieb für Dissertationsdruck von Robert Noske in Borna-Leipzig

1936

Berichterstatter: Professor Dr. E. A. Weiss
Mitberichterstatter: Professor Dr. H. Beck

Tag der mündlichen Prüfung: 27. November 1935

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

I. Teil: Abhängige Punktfiguren der Ebene 3

§ 1. Die Abbildung von C. Segre 3

§ 2. Die Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren und die Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punkten . 9

§ 3. Über gewisse ebene Konfigurationen 26

II. Teil: Abhängige Punktfiguren des Raumes 32

§ 4. Die Abbildung von C. Segre 32

§ 5. Die Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren und die Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punkten . 37

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546416_0053

Einleitung.

Im komplexen R_n heißen r Punktepaare (x^i, y^i) (in bezug auf Korrelationen) abhängig im Grade s, wenn die Zahl aller — in Punktkoordinaten durch eine Gleichung der Form

$$(a\,x)\,(b\,y) = 0\,,$$

$$(a_i b_k = a_{ik}; \quad i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

gegebenen — linear-unabhängigen Korrelationen, in bezug auf welche ihre Punkte konjugiert sind, sich um s Einheiten größer erweist, als die mechanische Abzählung anzeigt[1]).

Ebenso heißen im komplexen R_n r Punkte x^i (in bezug auf Hermitesche Punktkomplexe) abhängig im Grade s, wenn die Zahl aller — in Punktkoordinaten durch eine Gleichung der Form

$$(a\,x)\,(\overline{a\,x}) = 0\,,$$

$$(a_i \bar{a}_k = a_{ik},\ a_{ik} = \bar{a}_{ki}; \quad i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

gegebenen — linear-unabhängigen Hermiteschen Punktkomplexe, die durch sie hindurchlaufen, sich um s Einheiten größer erweist, als die mechanische Abzählung anzeigt[2]).

Untersuchungen über abhängige Punktepaare (Punkte) erfordern im wesentlichen die Behandlung der Figuren, welche die Basis einer linearen Mannigfaltigkeit von Korrelationen (Hermiteschen Punktkomplexen) bilden. Dabei ergibt sich eine weitgehende Analogie zwischen den beiden Theorien, zu der E. Study[3]) bemerkt hat, die Theorie abhängiger Punktepaare schließe die der abhängigen Punkte als besonderen Fall ein. Diese Analogie wird besonders deutlich, wenn man beide Theorien nebeneinander mit Hilfe einer von C. Segre[4])

---

[1]) J. Rosanes, Über linear-abhängige Punktsysteme; Crelles J. 88, 1880, S. 241 ff. Im folgenden kurz als „J. Rosanes I" zitiert.

[2]) E. Study, Kürzeste Wege im komplexen Gebiet; Math. Ann. 60, 1905, S. 349.

[3]) E. Study a. a. O. S. 348 Anm.

[4]) C. Segre, Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi. Rend. del Circolo Matematico di Palermo 5, 1891, S. 192 ff. Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici; Math. Ann. 40, 1892, S. 413 ff.

stammenden Abbildung der Korrelationen (Hermite schen Komplexe) aus Eigenschaften von Punktfiguren auf „Segre schen Mannigfaltigkeiten“ herleitet. Das soll in der vorliegenden Arbeit geschehen.

Im ersten Teil behandeln wir abhängige Punktfiguren der Ebene, und zwar nebeneinander die Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren und die von sechs im Grade 1 abhängigen Punkten. Die Eigenschaften beider Figuren leiten wir mit Hilfe der Segre schen Abbildung aus der Figur von sechs Punkten allgemeiner Lage eines R_4, dem Hexastigma, ab.

Im zweiten Teil erledigen wir die entsprechende Aufgabe für den Raum. Wir behandeln nebeneinander die Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren und die von acht im Grade 1 abhängigen Punkten. Die Eigenschaften beider Figuren leiten wir mit Hilfe der Segre schen Abbildung aus der Figur von acht Punkten allgemeiner Lage eines R_6 ab.

Die auf die beiden ebenen Figuren und die räumliche Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren bezüglichen Sätze sind zumeist bekannt. Nur die Art der Ableitung kann hier auf Neuartigkeit Anspruch erheben. Diese bedingt es, daß wir ungezwungen nur Sätze über Punktepaare und die ihnen entsprechenden Sätze über Punkte erhalten. In bezug auf weitere Eigenschaften der behandelten Figuren verweisen wir auf die weiter unten angegebene Literatur. Für neu halten wir unsere Untersuchungen über die räumliche Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punkten, auf die bisher lediglich E. Study[1]) in einer Anmerkung hingewiesen hat.

---

[1]) E. Study a. a. O. S. 349 Anm.

Erster Teil.

Abhängige Punktfiguren der Ebene.

§ 1. Die Abbildung von C. Segre.

Wir beschreiben zunächst die von C. Segre stammende Abbildung der ebenen Korrelationen und Hermiteschen Komplexe, soweit wir sie im folgenden benötigen[1]).

1. Abbildung der ebenen Korrelationen auf die Punkte des R_8.

Die komplexen Koeffizienten p_{ik} der Bilinearformen

$$(1) \qquad (pu)(qv), \quad (p_i q_k = p_{ik};\ i, k = 1, 2, 3)$$

deuten wir als homogene Punktkoordinaten in einem R_8 und bilden so die zu diesen Formen gehörenden korrelativen Verwandtschaften zwischen zwei (solange nicht ausdrücklich anders verfügt wird, voneinander verschiedenen) Ebenen auf die Punkte des R_8 ab. Die neun komplexen Koeffizienten a_{ik} der Bilinearformen

$$(2) \qquad (ax)(by), \quad (a_i b_k = a_{ik};\ i, k = 1, 2, 3)$$

müssen wir dann als homogene R_7-Koordinaten des R_8 deuten und so die zu diesen Formen gehörenden korrelativen Verwandtschaften auf die R_7 des R_8 abbilden. *Dann entspricht dem Konjugiertsein zweier durch die Gleichungen*

$$(ax)(by) = 0 \quad \textit{und} \quad (pu)(qv) = 0$$

gegebenen Korrelationen die vereinigte Lage ihres Bildpunktes X und ihres Bild-R_7 U; denn vermöge der Abbildung folgt

$$(ap)(bq) = \sum a_{ik} p_{ik} = \sum U_{ik} X_{ik} = (UX).$$

---

[1]) Vgl. auch J. L. Coolidge, The Geometry of the Complex Domain, Oxford 1924, S. 106ff.; H. J. van Venn, A Representation on R_8 of the Projectivities of Point-Fields and Ray-Fields; Proceedings Amsterdam 30, 1927, S. 352ff.; A. Werres, Die systematische Stellung ebener Projektivitäten, Diss. Bonn 1932.

Die zu den Formen (1) vom Rang 2 gehörenden Korrelationen sind durch eine reguläre projektive Beziehung zwischen den Punkten zweier „Hauptgeraden“ bestimmt: Eine Gerade der ersten Ebene schneidet die erste Hauptgerade in einem Punkt; ihr wird der Punkt auf der zweiten Hauptgeraden zugeordnet, der jenem Punkt vermöge der projektiven Beziehung zugeordnet ist. Der Hauptgeraden selbst wird kein bestimmter Punkt zugeordnet. *Die Korrelationen vom Rang 2 oder, was dasselbe ist, die projektiven Beziehungen zwischen den Punkten zweier Geraden werden auf die Punkte einer M_7^3 abgebildet.*

Die zu den Formen (1) vom Rang 1 gehörenden Korrelationen sind durch ein Punktepaar bestimmt: Jeder Geraden allgemeiner Lage der ersten Ebene wird ein und derselbe Punkt der zweiten Ebene zugeordnet. Den Geraden durch einen in der ersten Ebene ausgezeichneten Punkt wird kein bestimmter Punkt in der zweiten Ebene zugeordnet. Die Formen (1) vom Rang 1 zerfallen in das Produkt von zwei Linearformen $(p\,u)\cdot(q\,v)$. *Die Korrelationen vom Rang 1 oder, was dasselbe ist, die aus den Punkten zweier Ebenen gebildeten Punktepaare (p, q) werden auf die Punkte einer ganz auf der M_7^3 gelegenen M_4^6 abgebildet.*

Die M_7^3 ist der Ort aller Sehnen der M_4^6. *Jeder Punkt einer nicht ganz auf der M_4^6 gelegenen Sehne der M_4^6, deren Endpunkte Bilder der Punktepaare (p^1, q^1), (p^2, q^2) sind, wird auf eine projektive Beziehung zwischen den Punkten der Geraden $p^1 p^2$ und $q^1 q^2$ abgebildet, in der sich die Punkte p^1, q^2 und p^2, q^1 entsprechen.*

2. Das Bild von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren im R_8.

Ein Punktepaar, dessen Punkte in bezug auf eine durch die Gleichung $(a\,x)(b\,y) = 0$ gegebene Korrelation konjugiert sind, wird auf einen Punkt der M_4^6 abgebildet, der in dem Bild-R_7 dieser Korrelation liegt. r im Grade s abhängige Punktepaare werden also auf r Punkte der M_4^6 abgebildet, die (in bezug auf Räume R_7) abhängig im Grade s sind, d. h. für die sich die Anzahl der hindurchlaufenden R_7 um s Einheiten größer erweist, als die mechanische Abzählung anzeigt. Daraus folgt:

Sechs im Grade 1 abhängige Punktepaare werden auf sechs Punkte der M_4^6 abgebildet, die in einem und nur einem R_4 liegen.

Im allgemeinen schneidet der von fünf vorgegebenen Punkten der M_4^6 aufgespannte R_4 die M_4^6 in einem eindeutig bestimmten sechsten Punkt; d. h.:

Im allgemeinen liefern fünf vorgegebene Punktepaare (p^1, q^1), $(p^2, q^2), \cdots, (p^5, q^5)$ *ein eindeutig bestimmtes sechstes im Grade 1 abhängiges Punktepaar* (p^6, q^6) [1].

Über den genauen Sinn der Worte „im allgemeinen" hat A. Werres ausführliche Untersuchungen angestellt. Er hat die notwendigen und hinreichenden Voraussetzungen dafür hergeleitet, daß fünf vorgegebene Punktepaare eindeutig ein sechstes im Grade 1 abhängiges Punktepaar liefern [2]. Wir machen im folgenden — von der weiter unten beschriebenen speziellen Figur abgesehen — in bezug auf die Lage der fünf vorgegebenen Punktepaare mehr Voraussetzungen, als nach den Untersuchungen von A. Werres notwendig sind [3]. Es liegt dies daran, daß wir gewisse Sonderfälle, die bei A. Werres möglich sind, bei unserer Problemstellung ausscheiden müssen [4].

Wir verlangen:

1. Keine drei Punkte $p^i (q^i)$ sollen auf einer Geraden liegen.
2. Es gibt keine Kollineation $p^i \to q^i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Auf eine spezielle Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren werden wir geführt, wenn wir in bezug auf die Lage der fünf vorgegebenen Punktepaare die Voraussetzung 2 fallen lassen, also voraussetzen, daß es eine Kollineation $p^i \to q^i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ gibt. Alle Punktepaare aus Punkten, die einander vermöge einer regulären Kollineation zugeordnet sind, werden auf die Punkte einer ganz auf der M_4^6 gelegenen M_2^4 des R_5 (Veronesesche Fläche) abgebildet, wie sie sich bei der Abbildung der Kurven zweiter Klasse auf die Punkte des R_5 als Bildmannigfaltigkeit der Kurven zweiter

---

[1]) R. Sturm, Das Problem der Projektivität und seine Anwendung auf die Flächen 2. Grades, Math. Ann. **1**, 1869, S. 536; Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Leipzig 1908, Bd. 1 S. 355 ff., Bd. 2 S. 284 ff.; A. Voß, Zur Theorie der linearen Konnexe, Math. Ann. **15**, 1879, S. 355 ff.; J. Rosanes I S. 249.

[2]) A. Werres a. a. O. S. 25 ff. Überträgt man diese Voraussetzungen mit Hilfe der Abbildung, so erhält man die Voraussetzungen dafür, daß fünf Punkte der M_4^6 einen R_4 aufspannen, welcher die M_4^6 in einem eindeutig bestimmten sechsten Punkt schneidet.

[3]) Die Mehrforderung liegt in der Voraussetzung 1. A. Werres braucht hier nur zu fordern: 1a) Alle Punkte $p^i (q^i)$ sollen voneinander verschieden sein; 1b) Liegen drei Punkte $p^i (q^i)$ auf einer Geraden, so sollen die zugehörigen Punkte $q^i (p^i)$ nicht auf einer Geraden liegen. — Daß die von uns angegebenen Voraussetzungen 1 und 2 hinreichend dafür sind, daß fünf vorgegebene Punktepaare eindeutig ein im Grade 1 abhängiges sechstes bestimmen, beweisen wir später (Satz 6) noch einmal unabhängig von den Untersuchungen von A. Werres.

[4]) Unsere Mehrforderung wird auf S. 8 begründet.

Klasse vom Rang 1 (Doppelpunkte der Ebene) ergibt[1]). Den fünf vorgegebenen Punktepaaren entsprechen jetzt fünf Punkte der M_2^4, und der von diesen Bildpunkten aufgespannte R_4 schneidet die M_2^4 in einer C_1^4. Die Punkte dieser C_1^4 sind die Bilder der Punktepaare, die aus einem Punkt des durch die Punkte p^i laufenden Kegelschnitts und dem ihm vermöge der Kollineation zugeordneten Punkt bestehen (der auf dem durch die Punke q^i laufenden Kegelschnitt liegt). Die fünf vorgegebenen Punktepaare werden durch jedes dieser ∞^1 Punktepaare zu einer Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren ergänzt. Setzen wir schließlich noch, indem wir die beiden Ebenen zusammenfallen lassen, voraus, daß die fünf vorgegebenen Punktepaare aus Punkten bestehen, die einander vermöge der identischen Kollineation zugeordnet sind, so ergibt sich:

Die Punkte eines Pascalschen Sechsecks bilden — doppelt gezählt — eine Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren[2]).

3. Abbildung der ebenen Hermiteschen Geradenkomplexe auf die Punkte des R_8.

Die in Abschnitt 1 beschriebene Abbildung der Punktepaare (p, q) enthält insbesondere die Abbildung der Punktepaare $(p, \bar{p})$[3]) und damit eine Abbildung der Punkte einer komplexen Ebene. Durch eine geeignete imaginäre Kollineation des R_8 kann erreicht werden, daß die ∞^4 Punkte der komplexen Ebene auf die reellen Punkte einer M_4^6 abgebildet werden. Diese Abbildung ist — wie die Abbildung der Punktepaare (p, q) in der Abbildung der zu den Formen (1) gehörenden Korrelationen auf die komplexen Punkte des R_8 — in der Abbildung der zu den Hermiteschen Formen

(3) $\qquad (pu)(\overline{pu}),\ (p_i\bar{p}_k = p_{ik},\ p_{ik} = \bar{p}_{ki};\ i, k = 1, 2, 3)$

gehörenden Geradenkomplexe auf die reellen Punkte des R_8 enthalten.

Zum Zwecke dieser Abbildung deuten wir die reellen Verbindungen

$$X_{11} = p_{11},\ \sqrt{2}\,X_{12} = p_{12} + \bar{p}_{12},\ \sqrt{2}\,i\,X_{21} = p_{12} - \bar{p}_{12} \text{ usw.}$$

der komplexen Koeffizienten p_{ik} als homogene Punktkoordinaten in einem R_8 und bilden so die zu den Formen (3) gehörenden Geraden-

---

[1]) Wegen der Veroneseschen Fläche vgl. E. Bertini, Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume; deutsch von A. Duschek, Wien 1924, Kap. XVI S. 382 ff.

[2]) J. Rosanes I S. 251.

[3]) $\bar{p}$ bezeichnet den zu p konjugiert-komplexen Punkt.

komplexe auf die reellen Punkte des R_8 ab. Aus den komplexen Koeffizienten a_{ik} der Hermiteschen Formen

$$(4) \qquad (ax)(\overline{ax}), \quad (a_i \bar{a}_k = a_{ik}, \; a_{ik} = \bar{a}_{ki}; \; i, k = 1, 2, 3)$$

haben wir dann die reellen Verbindungen

$$U_{11} = a_{11}, \; \sqrt{2}\, U_{12} = a_{12} + \bar{a}_{12}, \; \sqrt{2}\, i\, U_{21} = a_{12} - \bar{a}_{12} \text{ usw.}$$

zu bilden, müssen diese als homogene R_7-Koordinaten des R_8 deuten und so die zu den Formen (4) gehörenden Punktkomplexe auf die reellen R_7 des R_8 abbilden. *Dann entspricht der konjugierten Lage eines Hermiteschen Geradenkomplexes und eines Punktkomplexes die vereinigte Lage seines Bildpunktes X und seines Bild-R_7 U*; denn vermöge der Abbildung folgt

$$(ap)(\overline{ap}) = \sum a_{ik}\, p_{ik} = \sum U_{ik}\, X_{ik} = (UX).$$

Ein Hermitescher Geraden-(Punkt-)Komplex vom Range 3 hat entweder keine reale Gerade (keinen realen Punkt), oder er hat eine (einen) und dann gleich ∞^3 reale Geraden (Punkte).

Die zu den Formen (3) vom Rang 2 gehörenden Geradenkomplexe sind durch eine reguläre antiinvolutorische Beziehung zwischen den Punkten einer Geraden bestimmt: Eine solche Antiinvolution hat entweder keinen oder einen und dann gleich ∞^1 Ruhepunkte, die dann eine Kette bilden. Der Geradenkomplex besteht aus der Trägergeraden der Antiinvolution und — im Falle daß eine Kette von Ruhepunkten existiert — aus allen Geraden, welche durch diese Ruhepunkte laufen. *Die Geradenkomplexe vom Rang 2 oder, was dasselbe ist, die antiinvolutorischen Beziehungen zwischen den Punkten einer Geraden werden auf die reellen Punkte einer M_7^3 abgebildet.*

Die zu den Formen (3) vom Rang 1 gehörenden Geradenkomplexe sind durch einen Punkt der komplexen Ebene bestimmt: Ein solcher Geradenkomplex besteht aus allen Geraden, die durch einen Punkt der komplexen Ebene laufen. *Die Geradenkomplexe vom Rang 1 oder, was dasselbe ist, die Punkte der komplexen Ebene werden auf die reellen Punkte der ganz auf der M_7^3 gelegenen M_4^6 abgebildet.*

Jeder reelle Punkt einer nicht ganz auf der M_4^6 gelegenen (reellen) Sehne der M_4^6, deren Endpunkte Bilder der Punkte 1, 2 sind, wird auf eine antiinvolutorische Beziehung zwischen den Punkten der Geraden 12 abgebildet, in der sich die Punkte 1, 2 entsprechen.

4. Das Bild von sechs im Grade 1 abhängigen Punkten im R_8.

Ein Punkt, der dem durch eine Gleichung $(ax)(\overline{ax}) = 0$ gegebenen Hermiteschen Punktkomplex angehört, wird jetzt auf einen reellen

Punkt der M_4^6 abgebildet, der in dem reellen Bild-R_7 dieses Komplexes liegt. r im Grade s abhängige Punkte werden auf r reelle Punkte der M_4^6 abgebildet, die (in bezug auf reelle Räume R_7) abhängig im Grade s sind. Daraus folgt:

Sechs im Grade 1 abhängige Punkte werden auf sechs reelle Punkte der M_4^6 abgebildet, die in einem und nur einem R_4 liegen.

Entsprechend wie für Punktepaare schließen wir:

Im allgemeinen liefern fünf vorgegebene Punkte einen eindeutig bestimmten sechsten im Grade 1 abhängigen Punkt[1]).

Die Untersuchung des genauen Sinnes der Worte „im allgemeinen" läßt sich auf die entsprechenden Untersuchungen von A. Werres zurückführen. Demnach müssen wir folgende Voraussetzungen dafür machen, daß fünf vorgegebene Punkte eindeutig einen sechsten im Grade 1 abhängigen Punkt bestimmen:

1. Keine drei Punkte sollen auf einer Geraden liegen.

2. Die fünf vorgegebenen Punkte sollen nicht durch eine ternäre Kette verbunden werden können.

Diese Voraussetzungen sind notwendig und hinreichend[2]).

---

[1]) C. Segre, Le rappresentazioni . . ., a. a. O. S. 436. Un nuovo campo di ricerche geometriche; Atti della R. Accademia delle Science di Torino, vol. XXV, 1889, S. 57 Anm; J. L. Coolidge a. a. O. S. 131 f.

[2]) E. Study a. a. O. S. 347. Der Beweis ergibt sich wie folgt: 1. Die von A. Werres zugelassenen Tripel von Punktepaaren (p^i, q^i), von denen etwa die drei Punkte p^i einer Geraden angehören, die drei Punkte q^i aber nicht, können im Falle von Punktepaaren (p^i, p^i) nicht auftreten. 2. Analog wie A. Werres den Fall ausschließt, daß es eine Kollineation $p^i \to q^i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ gibt, müssen wir hier den Fall ausschließen, daß die fünf vorgegebenen Punkte durch eine ternäre Kette verbunden werden können. Als Bildmannigfaltigkeit der Punkte einer ternären Kette erhalten wir nämlich wieder eine in einem R_5 gelegene M_3^4 (Veronesesche Fläche), und der von fünf Punkten derselben aufgespannte R_4 schneidet diese in einer C_1^4. Daraus folgt: Fünf Punkte, die durch eine ternäre Kette verbunden werden können, liefern ∞^1 im Grade 1 abhängige Punkte (E. Study a. a. O. S. 350).

Daß die von uns oben angegebenen Voraussetzungen 1 und 2 hinreichend dafür sind, daß fünf vorgegebene Punkte eindeutig einen im Grade 1 abhängigen sechsten bestimmen, beweisen wir später (Satz VI) noch einmal unabhängig von diesen Untersuchungen.

Die Mehrforderung, die wir gegenüber den von A. Werres formulierten notwendigen und hinreichenden Bedingungen auf S. 5 eingeführt haben, findet jetzt ihre Begründung darin, daß wir eine vollkommene Analogie zwischen der Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren und der von sechs im Grade 1 abhängigen Punkten herstellen wollen.

§ 2. Die Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren und die Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punkten.

5. Das Hexastigma.

Wir haben in § 1 die Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) mit der Figur von sechs Punkten eines R_4 in Verbindung gesetzt. Die mit einem System von sechs Punkten des R_4 verbundene Konfiguration ist von H. W. Richmond[1]) zuerst untersucht und Hexastigma genannt worden. Sie bildet die Grundlage unserer ferneren Untersuchungen.

In diesem Paragraphen erinnern wir zunächst an die einfachsten Eigenschaften des Hexastigmas und leiten dann aus diesen mit Hilfe der Segreschen Abbildung Eigenschaften der Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) ab.

Von sechs in einem R_4 gelegenen Punkten [1], [2], ..., [6], die wir als Fundamentalpunkte des Hexastigmas bezeichnen, setzen wir voraus, daß je fünf den ganzen R_4 aufspannen. Diese Fundamentalpunkte spannen zu je zweien 15 Verbindungslinien (ij), zu je dreien 20 Verbindungsebenen $\langle ijk\rangle$ und zu je vieren 15 Verbindungsflache (R_3) $\{ijk\}$ auf.

Je drei indexfremde Verbindungsgeraden, z. B.

$$(1\,2)\,(3\,4)\,(5\,6)$$

bestimmen eine gemeinsame Transversale $(1\,2,\,3\,4,\,5\,6)$, die Schnittgerade der Verbindungsflache $\{3\,4\,5\,6\}$, $\{5\,6\,1\,2\}$, $\{1\,2\,3\,4\}$, welche danach die Transversalpunkte $[1\,2]$, $[3\,4]$, $[5\,6]$ enthält, in denen je eine der Verbindungsgeraden das Verbindungsflach der beiden übrigen schneidet.

Die 15 Transversalen bilden mit 10 Hauptflachen (R_3) eine Segre'sche Konfiguration $(15_4, 10_6)$. Ein solches Hauptflach wird von sechs Transversalen aufgespannt, welche auf zwei, verschiedenen Scharen angehörende Erzeugendentripel einer Fläche 2.0. verteilt sind; so z. B. ist das Hauptflach $\{1\,2\,3\}\{4\,5\,6\}$ durch die 2·3 Transversalen bestimmt, auf denen die Transversalpunkte

$$[1\,4]\,[2\,5]\,[3\,6]$$
$$[2\,6]\,[3\,4]\,[1\,5]$$
$$[3\,5]\,[1\,6]\,[2\,4]$$

liegen.

---

[1]) H. W. Richmond, On the figure of six points in space of four dimensions; Quart. Journ. **31**, 1900. Vgl. auch: H. Baker, Principles of Geometry vol. II, Cambridge 1922, Note I, II; Vol. IV, Cambridge 1925, Kap. V; E. Jouffret, Mélanges de Géométrie de quatre dimensions, Paris 1908, Kap. V.

$[\overline{ij}]$ sei der vierte harmonische Punkt zum Transversalpunkt $[ij]$ in bezug auf die Fundamentalpunkte $[i]$, $[j]$. Dann liegen die drei harmonischen Punkte

$$[\overline{2\,3}]\,[\overline{3\,1}]\,[\overline{1\,2}]$$

der Verbindungsebene $\langle 1\,2\,3\rangle$ auf einer Geraden; denn die drei Geraden

$$[1]\,[2\,3];\ [2]\,[3\,1];\ [3]\,[1\,2]$$

laufen durch einen Punkt, den Kreuzungspunkt $[1\,2\,3]\,[4\,5\,6]$, Schnittpunkt der Verbindungsebenen $\langle 1\,2\,3\rangle$, $\langle 4\,5\,6\rangle$. Ebenso liegen die Punktetripel

$$[\overline{2\,3}]\,[3\,1]\,[1\,2];\ [2\,3]\,[\overline{3\,1}]\,[1\,2];\ [2\,3]\,[3\,1]\,[\overline{1\,2}]$$

auf je einer Geraden.

6. Zur Beziehung zwischen der Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) und dem Hexastigma.

Die in Abschnitt 5 angeführten Eigenschaften des Hexastigmas genügen, um daraus die grundlegenden Eigenschaften der Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) abzuleiten. Die Beziehung zwischen der ebenen Figur und ihrer Bildfigur im R_4 stellen wir her, indem wir annehmen, daß die Fundamentalpunkte $[1]$, $[2]$, . . ., $[6]$ des Hexastigmas

auf der Bildmannigfaltigkeit $M_4^{\,6}$ der aus den Punkten zweier Ebenen gebildeten Punktepaare	auf der Bildmannigfaltigkeit $M_4^{\,6}$ der Punkte einer komplexen Ebene
so gelegen sind, daß sie auf	
sechs im Grade 1 abhängige Punktepaare (p^1, q^1) (p^2, q^2), . . ., (p^6, q^6) abgebildet werden, von denen je fünf den Voraussetzungen 1 und 2 auf S. 5 genügen.	sechs im Grade 1 abhängige Punkte $1, 2, \ldots, 6$ abgebildet werden, von denen je fünf den Voraussetzungen 1 und 2 auf S. 8 genügen.

Die Existenz solcher Punktsextupel auf der $M_4^{\,6}$ folgt aus dem

Satz 1: In einem System von sechs verschiedenen im Grade 1 abhängigen Punktepaaren $(p^1, q^1), (p^2, q^2), \ldots, (p^6, q^6)$ möge ein Quintupel, z. B. $(p^1, q^1), \ldots, (p^5, q^5)$, den Voraussetzungen 1 und 2 auf S. 5 genügen. Dann genügen alle in ihm enthaltenen Quintupel von Punktepaaren diesen Voraussetzungen.	*Satz I: In einem System von sechs verschiedenen im Grade 1 abhängigen Punkten $1, 2, \ldots, 6$ möge ein Quintupel, z. B. $1, \ldots, 5$, den Voraussetzungen 1 und 2 auf S. 8 genügen. Dann genügen alle in ihm enthaltenen Quintupel von Punkten diesen Voraussetzungen.*

Beweis des Satzes 1:

1. Ein Quintupel, z. B. $(p^2, q^2), \ldots, (p^6, q^6)$, genüge nicht der Voraussetzung 1; es sei etwa $(p^4 p^5 p^6) = 0$. Dann folgt aus der Identität

$$\lambda_1 (p^1 u) \cdot (q^1 v) + \cdots + \lambda_6 (p^6 u) \cdot (q^6 v) \equiv 0, \quad \{u, v\}, \quad \lambda_i \neq 0,$$

der sechs im Grade 1 abhängige Punktepaare genügen, im Falle $u = p^4 p^5$, $v = q^2 q^3$ entgegen der Voraussetzung entweder $(p^1 p^4 p^5) = 0$ oder $(q^1 q^2 q^3) = 0$.

2. Ein Quintupel, z. B. $(p^2, q^2), \ldots, (p^6, q^6)$, genüge nicht der Voraussetzung 2; es gebe also eine Kollineation $p^i \to q^i (i = 2, 3, 4, 5, 6)$. Dann folgt aus der auf S. 5 beschriebenen Abbildung entgegen der Voraussetzung, daß diese Kollineation die Zuordnung $p^i \to q^i (i = 1, 2, \ldots, 6)$ bewirkt. W. z. b. w.

Der Beweis des Satzes I verläuft analog.

Wir nehmen nun auf der M_4^6 fünf Punkte an, deren Bilder in der Ebene die Voraussetzungen 1 und 2 von S. 5 (S. 8) erfüllen. Sie spannen einen R_4 auf, der die M_4^6 in (mindestens) einem sechsten Punkt schneidet. Dieser Punkt bildet dann mit den fünf vorgegebenen Punkten ein Sextupel mit den verlangten Eigenschaften.

Unsere weiteren Entwicklungen (Satz 6 (VI)) zeigen, daß der sechste Punkt eindeutig bestimmt ist. Er kann allerdings mit einem der fünf vorgegebenen Punkte zusammenfallen. Die Frage, wann das von den fünf vorgegebenen Punktepaaren (der von den fünf vorgegebenen Punkten) im Grade 1 abhängige sechste mit einem dieser fünf zusammenfällt, behandeln wir in Abschnitt 10.

7. Der Zusammenhang zwischen der Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) und Tripeln linear-abhängiger Projektivitäten (Antiinvolutionen).

Führen wir die Abbildung des in Abschnitt 6 beschriebenen Hexastigmas durch, so ergibt sich: Jeder Punkt der Verbindungslinie (12) wird auf eine

projektive Beziehung zwischen den Punkten der Geraden $p^1 p^2$ und $q^1 q^2$ abgebildet, in der sich die Punkte p^1, q^2 und p^2, q^1 entsprechen.

antiinvolutorische Beziehung zwischen den Punkten der Geraden 12 abgebildet, in der sich die Punkte 1, 2 entsprechen.

Analog werden die Punkte der übrigen Verbindungslinien abgebildet.

Wir wollen insbesondere den auf der Verbindungslinie (12) gelegenen Transversalpunkt [1 2] abbilden. Durch ihn laufen die Transversalen (1 2, 3 4, 5 6), (1 2, 3 5, 4 6), (1 2, 3 6, 4 5). Die auf jeder

dieser drei Transversalen gelegenen Transversalpunkte werden auf Tripel linear-abhängiger Projektivitäten (Antiinvolutionen) abgebildet, in denen je zwei Projektivitäten (Antiinvolutionen) die dritte eindeutig bestimmen. Linear-abhängige Projektivitäten hat A. Werres untersucht[1]). Seine Untersuchungen können analog für linear-abhängige Antiinvolutionen durchgeführt werden[2]). Dann entsprechen sich folgende Sätze:

Satz über linear-abhängige Projektivitäten:

Die Punkte zweier Geraden a^1, b^1 seien aufeinander vermöge einer beliebigen Projektivität P_1, die zweier davon verschiedener Geraden a^2, b^2 vermöge einer beliebigen Projektivität P_2 bezogen, jedoch so, daß dem Schnittpunkt (a^1, a^2) nicht zugleich in beiden Projektivitäten der Schnittpunkt (b^1, b^2) entspricht. Dann bestimmen diese Projektivitäten eindeutig eine weitere Projektivität P_3 zwischen den Punkten zweier Geraden a^3, b^3.

Dabei wird a^3 (b^3) die Verbindungslinie der dem Schnittpunkt (b^1, b^2) $((a^1, a^2))$ vermöge P_1 und P_2 zugeordneten Punkte, und die Projektivität zwischen den Punkten von a^3, b^3 ist dadurch bestimmt, daß den Schnittpunkten einer Geraden allgemeiner Lage mit den drei Geraden a^i (b^i) vermöge der drei Projektivitäten drei Punkte auf den Geraden b^i (a^i) zugeordnet werden, die wieder auf einer Geraden liegen.

Satz über linear-abhängige Antiinvolutionen:

Die Punkte einer Geraden a^1 seien aufeinander vermöge einer beliebigen Antiinvolution A_1, die einer davon verschiedenen Geraden a^2 vermöge einer beliebigen Antiinvolution A_2 bezogen, jedoch so, daß der Schnittpunkt (a^1, a^2) nicht zugleich Ruhepunkt dieser beiden Antiinvolutionen ist. Dann bestimmen diese Antiinvolutionen eindeutig eine weitere Antiinvolution A_3 zwischen den Punkten einer Geraden a^3.

Dabei wird a^3 die Verbindungslinie der dem Schnittpunkt (a^1, a^2) vermöge A_1 und A_2 zugeordneten Punkte, und die Antiinvolution zwischen den Punkten von a^3 ist außerdem dadurch bestimmt, daß den Schnittpunkten einer Geraden allgemeiner Lage mit den drei Geraden a^i vermöge der drei Antiinvolutionen drei Punkte zugeordnet werden, die wieder auf einer Geraden liegen[3]).

---

[1]) A. Werres a. a. O. S. 2 ff.

[2]) Tripel von linear-abhängigen Antiinvolutionen (von solchen mit realer Ruhekette) hat E. Study behandelt; a. a. O. S. 347.

[3]) Haben die beiden Antiinvolutionen A_1 und A_2 eine Kette realer Ruhepunkte, so hat auch A_3 eine solche Kette.

Die drei Projektivitäten (Antiinvolutionen) bilden zusammen ein Tripel linear-abhängiger Projektivitäten (Antiinvolutionen), in dem je zwei Projektivitäten (Antiinvolutionen) die dritte eindeutig bestimmen. Der Konstruktion der von zwei vorgegebenen Projektivitäten (Antiinvolutionen) linear-abhängigen dritten Projektivität (Antiinvolution) entspricht im R_8 die Konstruktion des dritten Schnittpunktes der Verbindungsgeraden ihrer Bildpunkte mit der $M_7{}^3$.

Die dritte Projektivität (Antiinvolution) fällt mit einer der beiden vorgegebenen zusammen, d. h. die Verbindungsgerade der Bildpunkte der beiden vorgegebenen Projektivitäten (Antiinvolutionen) ist Tangente der $M_7{}^3$, wenn

dem Schnittpunkt von (a^1, a^2) in einer und nur einer der beiden vorgegebenen Projektivitäten der Schnittpunkt (b^1, b^2) entspricht.	der Schnittpunkt von (a^1, a^2) Ruhepunkt einer und nur einer der beiden vorgegebenen Antiinvolutionen ist.

Die dritte Projektivität (Antiinvolution) wird dann und nur dann unbestimmt, d. h. die Verbindungsgerade der Bildpunkte der beiden vorgegebenen Projektivitäten (Antiinvolutionen) auf $M_7{}^3$ gehört dieser ganz an, wenn

1. a^1 mit a^2 oder b^1 mit b^2 zusammenfällt; oder	1. a^1 mit a^2 zusammenfällt; oder
2. (a^1, a^2) in den beiden Projektivitäten (b^1, b^2) entspricht [1]).	2. (a^1, a^2) Ruhepunkt der beiden Antiinvolutionen ist.

Setzen wir jetzt — im Spezialfall — voraus, daß die Geraden a^1 und b^1, a^2 und b^2 des Satzes über linear-abhängige Projektivitäten zusammenfallen und daß die Projektivitäten P_1, P_2 Involutionen sind! Dann fällt auch a^3 mit b^3 zusammen; P_3 wird ebenfalls eine Involution. Aus dem Satz über linear-abhängige Projektivitäten geht ein entsprechender Satz über linear-abhängige Involutionen hervor.

Nach diesen Vorbereitungen können wir mit der Abbildung des Hexastigmas fortfahren:

---

[1]) A. Werres a. a. O. S. 23 ff.

Der Transversalpunkt [12] des Hexastigmas

wird auf eine projektive Beziehung [12] zwischen den Punkten der Geraden p^1p^2 und q^1q^2 abgebildet. Diese Projektivität ist durch die Zuordnung

$$p^1 \to q^2$$
$$p^2 \to q^1$$
$$(p^1p^2,\ p^3p^4) \to (q^1q^2,\ q^5q^6)$$
$$(p^1p^2,\ p^5p^6) \to (q^1q^2,\ q^3q^4)$$
$$(p^1p^2,\ p^3p^5) \to (q^1q^2,\ q^4q^6)$$
$$(p^1p^2,\ p^4p^6) \to (q^1q^2,\ q^3q^5)$$
$$(p^1p^2,\ p^3p^6) \to (q^1q^2,\ q^4q^5)$$
$$(p^1p^2,\ p^4p^5) \to (q^1q^2,\ q^3q^6)$$

bestimmt[1]).

wird auf eine antiinvolutorische Beziehung [12] zwischen den Punkten der Geraden 12 abgebildet. Diese Antiinvolution ist durch die Zuordnung

$$1 \to 2$$
$$(12,\ 34) \to (12,\ 56)$$
$$(12,\ 35) \to (12,\ 46)$$
$$(12,\ 36) \to (12,\ 45)$$

bestimmt.

Der harmonische Punkt $\overline{[12]}$ des Hexastigmas

wird auf eine zur Projektivität [12] in bezug auf die Punktepaare (p^1, q^1), (p^2, q^2) harmonische projektive Beziehung zwischen den Punkten der Geraden p^1p^2 und q^1q^2 abgebildet:

Einem Punkt p von p^1p^2, dem vermöge [12] ein Punkt q auf q^1q^2 entspricht, ordnet $\overline{[12]}$ den zu q in bezug auf q^1, q^2 harmonischen Punkt zu.

wird auf eine zur Antiinvolution [12] in bezug auf die Punkte 1, 2 harmonische Antiinvolution zwischen den Punkten der Geraden 12 abgebildet:

Einem Punkt p von 12, dem vermöge [12] ein Punkt p' entspricht, ordnet $\overline{[12]}$ den zu p in bezug auf 1, 2 harmonischen Punkt zu.

Die Abbildung der anderen Transversalpunkte und harmonischen Punkte des Hexastigmas verläuft analog. Sie liefert den

---

[1]) In dem Projektivitätentripel [12], [34], [56] mit den Trägergeraden p^1p^2, q^1q^2; p^3p^4, q^3q^4; p^5p^6, q^5q^6 erhält man nach dem Satz über linearabhängige Projektivitäten die Geraden p^5p^6 (q^5q^6) als Verbindungsgeraden der dem Schnittpunkt von $(q^1q^2,\ q^3q^4)$ $((p^1p^2,\ p^3p^4))$ vermöge [12] und [34] zugeordneten Punkte. Danach muß dann [12] z. B. die Zuordnung

$$(p^1p^2,\ p^3p^4) \to (q^1q^2,\ q^5q^6);\quad (p^1p^2,\ p^5p^6) \to (q^1q^2,\ q^3q^4)$$

bewirken. — Einen einfachen Beweis unserer Behauptung erhält man auch analog zu dem Beweis von Satz 21.

Satz 2: In der Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren sind die Punkte entsprechender Verbindungsgraden $p^i p^j$ und $q^i q^j$ vermöge zweier in bezug auf die Punktepaare (p^i, q^i), (p^j, q^j) harmonischer Projektivitäten $[ij]$ und $[\overline{ij}]$ so aufeinander bezogen, daß die Projektivitäten

$$[ij] \quad [kl] \quad [mn]$$
$$[\overline{jk}] \quad [ki] \quad [ij]$$
$$[\overline{jk}] \quad [\overline{ki}] \quad [\overline{ij}]$$

Tripel linear-abhängiger Projektivitäten bilden.

Satz II: In der Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punkten sind die Punkte der Verbindungsgeraden ij vermöge zweier in bezug auf die Punke i, j harmonischer Antiinvolutionen $[ij]$ und $[\overline{ij}]$ so aufeinander bezogen, daß die Antiinvolutionen

$$[ij] \quad [kl] \quad [mn]$$
$$[\overline{jk}] \quad [ki] \quad [ij]$$
$$[\overline{jk}] \quad [\overline{ki}] \quad [\overline{ij}]$$

Tripel linear-abhängiger Antiinvolutionen bilden.

Speziell gilt der

Satz 2 a: In einem Pascalschen Sechseck 1, 2, ..., 6 sind die Punkte der Verbindungsgeraden ij vermöge zweier in bezug auf die Punkte i, j harmonischer Involutionen $[ij]$ und $[\overline{ij}]$ so aufeinander bezogen, daß die Involutionen

$$[ij] \quad [kl] \quad [mn]$$
$$[\overline{jk}] \quad [ki] \quad [ij]$$
$$[\overline{jk}] \quad [\overline{ki}] \quad [\overline{ij}]$$

Tripel linear-abhängiger Involutionen bilden.

In diesem Fall ist z. B. die Involution [1 2] durch die Zuordnung

$$1 \to 2$$
$$(1\,2,\ 3\,4) \to (1\,2,\ 5\,6)$$
$$(1\,2,\ 3\,5) \to (1\,2,\ 4\,6)$$
$$(1\,2,\ 3\,6) \to (1\,2,\ 4\,5)$$

bestimmt. Daraus folgt: *Die Involution [1 2] des Satzes 2 a wird auf der Geraden 1 2 von dem Kegelschnittbüschel durch die Punkte 3, 4, 5, 6 ausgeschnitten.*

Nachdem wir die verschiedenen Tripel von linear-abhängigen Projektivitäten (Antiinvolutionen) beschrieben haben, die man mit Hilfe der Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) herstellen kann, wollen wir nun umgekehrt mit Hilfe von Tripeln linear-abhängiger Projektivitäten (Antiinvolutionen) solche Figuren von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) herstellen. Zu diesem Zweck nehmen wir an, daß [1 2], [3 4], [5 6] drei verschiedene linear-abhängige Punkte der M_7^3 sind, jedoch so, daß ihre Ver-

bindungsgerade (12, 34, 56) nicht ganz der M_7^3 angehört. Durch jeden der drei Punkte laufen ∞^2 Sehnen der M_4^6. [1], [2] seien die Endpunkte irgendeiner solchen Sehne durch [12]; [3], [4] irgendeiner solchen durch [34] und [5], [6] irgendeiner solchen durch [56]; alle diese Punkte seien voneinander verschieden. Dann ist (12, 34, 56) die einzige Treffgerade der Verbindungsgeraden (12), (34), (56)[1]. Die Geraden (12), (34), (56) oder, was dasselbe ist, die Punkte [1], [2], ..., [6] liegen also in einem und nur einem R_4, d. h. diese Punkte bilden eine Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punkten der M_4^6.

Die Abbildung liefert dann:

Satz 3: *[12], [34], [56] sei ein allgemeines*[2]) *Tripel linear-abhängiger projektiver Beziehungen zwischen den Punkten der Geraden* a^{12}, b^{12}; a^{34}, b^{34}; a^{56}, b^{56}. p^1, p^2 *seien zwei Punkte auf* a^{12}; p^3, p^4 *auf* a^{34}; p^5, p^6 *auf* a^{56} *und* q^2, q^1; q^4, q^3; q^6, q^5 *seien die ihnen auf* b^{12}; b^{34}; b^{56} *zugeordneten Punkte. Alle diese Punkte seien voneinander verschieden. Dann bilden die Punktepaare* (p^1, q^1), (p^2, q^2), ..., (p^6, q^6) *eine Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren*[3]).

Satz III: *[12], [34], [56] sei ein allgemeines*[2]) *Tripel linear-abhängiger antiinvolutorischer Beziehungen zwischen den Punkten der Geraden* a^{12}, a^{34}, a^{56}. *1 sei ein Punkt auf* a^{12}; *3 auf* a^{34}; *5 auf* a^{56} *und 2; 4; 6 seien die ihnen zugeordneten Punkte. Alle diese Punkte seien voneinander verschieden. Dann bilden die Punkte 1, 2, ..., 6 eine Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punkten.*

[1]) Andernfalls lägen die Punkte 1, 2, ..., 6 höchstens in einem R_3. Nun hat A. Werres bei der Ableitung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß fünf vorgegebene Punktepaare eindeutig ein sechstes im Grade 1 abhängiges bestimmen, einen Hilfssatz bewiesen (a. a. O. S. 26), dessen Inhalt wir auch so aussprechen können: Ein von vier vorgegebenen Punkten der M_4^6 aufgespannter R_3 schneidet diese dann und nur dann in (∞^1) weiteren linear-abhängigen Punkten, wenn die vier vorgegebenen Punkte auf vier Punktepaare (p^i, q^i), $(i = 1, 2, 3, 4)$ abgebildet werden, von denen entweder die vier Punkte p^i oder die vier Punkte q^i auf einer Geraden liegen. Nehmen wir nun an, der R_3, in dem die Punkte [1], [2], ..., [6] liegen, werde von den Punkten [1], [2], [3], [4] aufgespannt. Diese vier Punkte werden dann nach dem obigen Hilfssatz auf vier Punktepaare (p^i, q^i), $(i = 1, 2, 3, 4)$ abgebildet, von denen z. B. die Punkte p^i auf einer Geraden liegen; d. h. die Geraden p^1p^2 und p^3p^4 fallen zusammen. Nach dem Satz über linear-abhängige Projektivitäten folgt daraus weiter, daß die von den Projektivitäten [12], [34] linear-abhängige dritte Projektivität [56] unbestimmt wird oder aber — was dasselbe ist — daß entgegen unserer Voraussetzung die Gerade (12, 34, 56) ganz der M_7^3 angehört. W.z.b.w.

[2]) Vgl. S. 12.

[3]) Diesen Satz gibt J. Rosanes in anderer Form an. Vgl. J. Rosanes, Zur Theorie der reziproken Verwandtschaften; Crelles J. **90**, 1880, S. 311.

Speziell gilt der

Satz 3a: $[12]$, $[34]$, $[56]$ *sei ein allgemeines Tripel linear-abhängiger involutorischer Beziehungen zwischen den Punkten der Geraden* a^{12}; a^{34}; a^{56}. *1 sei ein Punkt auf* a^{12}; *3 auf* a^{34}; *5 auf* a^{56} *und 2; 4; 6 seien die ihnen zugeordneten Punkte. Alle diese Punkte seien voneinander verschieden. Dann bilden die Punkte 1, 2, . . ., 6 ein Pascalsches Sechseck.*

8. Erste Konstruktion der Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten).

Wir leiten in den beiden folgenden Nummern mit Hilfe der Abbildung zwei Konstruktionen des von fünf vorgegebenen Punktepaaren (Punkten) im Grade 1 abhängigen sechsten Punktepaars (Punktes) ab.

Bei der ersten Konstruktion gehen wir von der Bemerkung aus, daß der Transversalpunkt [1 2] des Hexastigmas aus der Verbindungslinie (1 2) von dem Verbindungsflach $\{3\,4\,5\,6\}$ ausgeschnitten wird. Er wird also auf

eine (durch die Projektivität [1 2] bestimmte) Korrelation vom Rang 2 abgebildet, welche in der von den Punktepaaren (p^3, q^3), (p^4, q^4), (p^5, q^5), (p^6, q^6) aufgespannten Mannigfaltigkeit von ∞^3 Korrelationen enthalten ist.

einen (durch die Antiinvolution [1 2] bestimmten) Hermiteschen Geradenkomplex vom Rang 2 abgebildet, welcher in der von den Punkten 3, 4, 5, 6 aufgespannten Mannigfaltigkeit von ∞^3 Geradenkomplexen enthalten ist.

Nun gilt

Satz 4: Die Hauptgeraden der Korrelationen vom Rang 2, welche in der von vier Punktepaaren aufgespannten Mannigfaltigkeit von ∞^3 *Korrelationen enthalten sind, entsprechen sich in der durch diese vier Punktepaare bestimmten Kollineation.*

Satz IV: Die Hauptgeraden der Hermiteschen Geradenkomplexe vom Rang 2, welche in der von vier Punkten aufgespannten Mannigfaltigkeit von ∞^3 *Geradenkomplexen enthalten sind, durchdringen die durch diese vier Punkte bestimmte ternäre Kette in einer binären Kette.*

Beweis des Satzes 4:

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß die vier Punktepaare aus entsprechenden Eckpunkten der Koordinatendreiecke und den Einheitspunkten der beiden Ebenen gebildet sind.

Im folgenden kurz als „J. Rosanes II“ zitiert. Im Falle von Punktepaaren erhalten wir auch solche Figuren, welche nicht den Voraussetzungen auf S. 5 genügen.

Zu dem System der ∞^3 Korrelationen, welche diese vier Punktepaare aufspannen, gehören die Bilinearformen

$$(5)\qquad \begin{cases} (\xi_1+\xi_4)\,u_1 v_1 + \xi_4 u_1 v_2 + \xi_4\, u_1 v_3 \\ \quad + \xi_4\, u_2 v_1 + (\xi_2+\xi_4)\,u_2 v_2 + \xi_4\, u_2 v_3 \\ \quad + \xi_4\, u_3 v_1 + \xi_4 u_3 v_2 + (\xi_3+\xi_4)\,u_3 v_3, \end{cases}$$

wo die ξ_i komplexe Parameter bedeuten. Die Koordinaten der Hauptgeraden einer Korrelation vom Rang 2 erhält man aus den Koeffizienten der zugehörigen Bilinearform vom Rang 2, indem man die algebraischen Komplemente bildet, die zu den Elementen einer Zeile bzw. einer Kolonne der Determinante dieser Form gehören. Unter den Formen (5) betrachten wir jetzt nur diejenigen vom Rang 2 und berechnen die Hauptgeraden der zu ihnen gehörenden Korrelationen, indem wir z. B. die algebraischen Komplemente bilden, die zu den Elementen der ersten Zeile und ersten Spalte gehören. Da die Determinante symmetrisch ist, erhalten wir in beiden Fällen dasselbe Resultat: $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$. Daraus folgt — wie das bei unserer Annahme der Fall sein muß —: Die Hauptgeraden der zu den Formen (5) vom Rang 2 gehörenden Korrelationen sind einander vermöge der Kollineation zugeordnet, welche die Eckpunkte des Koordinatendreiecks und den Einheitspunkt der ersten Ebene in die entsprechenden Punkte der zweiten Ebene überführt. W.z.b.w.

Wir kehren zu der Abbildung des Transversalpunktes [1 2] zurück und können jetzt auf Grund von Satz 4 (IV) sagen:

Satz 5: In der Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (p^1, q^1), (p^2, q^2), . . ., (p^6, q^6) *entsprechen sich z. B. die Geraden* $p^1 p^2$ *und* $q^1 q^2$ *in der durch die Punktepaare* (p^3, q^3), (p^4, q^4), (p^5, q^5), (p^6, q^6) *bestimmten Kollineation.*

Satz V: In der Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punkten 1, 2, . . ., 6 durchdringt z. B. die Gerade 12 die ternäre Kette durch die Punkte 3, 4, 5, 6 in einer binären Kette[1]).

Aus diesem Satz ergibt sich schließlich folgende

Erste Konstruktion

des von fünf vorgegebenen Punktepaaren (p^1, q^1), (p^2, q^2), . . ., (p^5, q^5) im Grade 1 abhängigen Punktepaares (p^6, q^6).

des von fünf vorgegebenen Punkten 1, 2, . . ., 5 im Grade 1 abhängigen Punktes 6.

[1]) E. Study a. a. O. S. 347.

Satz 6: Jeden der fünf Punkte $p^1, \ldots, p^5$ $(q^1, \ldots, q^5)$ *unterwerfe man der Kollineation, welche durch die vier übrigen Punktepaare bestimmt ist. Man erhält so fünf Punkte* $q^{1'}, \ldots, q^{5'}$ $(p^{1'}, \ldots, p^{5'})$. *Dann laufen die Geraden* $p^1 p^{1'}, \ldots, p^5 p^{5'}$ $(q^1 q^{1'}, \ldots, q^5 q^{5'})$ *durch* p^6 (q^6).

Satz VI: Jeden der fünf Punkte $1, \ldots, 5$ *spiegele man an der ternären Kette, welche durch die vier übrigen Punkte bestimmt ist, d. h. man unterwerfe ihn der mit der Kette verbundenen involutorischen Antikollineation. Man erhält so fünf Punkte* $1', \ldots, 5'$. *Dann laufen die Geraden* $11', \ldots, 55'$ *durch* 6 [1]).

Es ist klar, daß die Konstruktion unter den von uns auf S. 5 (S. 8) über die Lage der fünf vorgegebenen Punktepaare (Punkte) gemachten Voraussetzungen ausführbar ist und zu einem eindeutig bestimmten sechsten im Grade 1 abhängigen Punktepaar (Punkt) führt. Damit ist gezeigt, daß jene Voraussetzungen hinreichend dafür sind, daß man die vorgegebenen Punktepaare (Punkte) eindeutig zu einer Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) ergänzen kann.

9. Zweite Konstruktion der Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten).

Die zweite Konstruktion erhalten wir, indem wir zunächst die Kreuzungspunkte des Hexastigmas abbilden. Der Kreuzungspunkt $[1\,2\,3]$ $[4\,5\,6]$ ist der Schnittpunkt der Verbindungsebenen $\langle 1\,2\,3\rangle$, $\langle 4\,5\,6\rangle$. Er wird auf

eine eindeutig bestimmte reguläre Korrelation abgebildet, welche sowohl in der von den Punktepaaren (p^1, q^1), (p^2, q^2), (p^3, q^3), als auch in der von den Punktepaaren (p^4, q^4), (p^5, q^5), (p^6, q^6) aufgespannten Mannigfaltigkeit von je ∞^2 Korrelationen enthalten ist.

einen eindeutig bestimmten regulären Hermiteschen Geradenkomplex abgebildet, welcher sowohl in der von den Punkten 1, 2, 3, als auch in der von den Punkten 4, 5, 6 aufgespannten Mannigfaltigkeit von je ∞^2 Geradenkomplexen enthalten ist.

Man nennt nun

zwei Dreiecke $p^1 p^2 p^3$, $q^1 q^2 q^3$ in bezug auf eine Korrelation konjugiert, wenn vermöge dieser Korrelation den Punkten p^1, p^2, p^3 die

ein Dreieck 1 2 3 Poldreieck eines Hermiteschen Geradenkomplexes, wenn vermöge des mit dem Geradenkomplex verbundenen

[1]) E. Study a. a. O. S. 347.

Geraden q^2q^3, q^3q^1, q^1q^2 zugeordnet werden.

Zwei Dreiecke $p^1p^2p^3$, $q^1q^2q^3$ sind in bezug auf alle diejenigen Korrelationen konjugiert, welche in der von den Punktepaaren (p^1, q^1), (p^2, q^2), (p^3, q^3) aufgespannten Mannigfaltigkeit von ∞^2 Korrelationen enthalten sind.

Polarsystems [1]) den Punkten 1, 2, 3 die Geraden 23, 31, 12 zugeordnet werden.

Ein Dreieck 123 ist Poldreieck aller der Hermiteschen Geradenkomplexe, welche in der von den Punkten 1, 2, 3 aufgespannten Mannigfaltigkeit von ∞^2 Geradenkomplexen enthalten sind.

Jetzt können wir sagen:

Der Kreuzungspunkt [123] [456] des Hexastigmas

wird auf eine eindeutig bestimmte reguläre Korrelation abgebildet, in bezug auf welche die Dreiecke $p^1p^2p^3$, $q^1q^2q^3$ und ebenso $p^4p^5p^6$, $q^4q^5q^6$ konjugiert sind.

wird auf einen eindeutig bestimmten regulären Hermiteschen Geradenkomplex abgebildet. Die Dreiecke 123 und 456 sind Poldreiecke dieses Geradenkomplexes.

Die Abbildung der anderen Kreuzungspunkte verläuft analog. Sie liefert den

Satz 7: Zerlegt man die Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren in irgend zwei Gruppen von je drei Paaren, so liefern diese beiden Gruppen je ein Paar von Dreiecken, welche in bezug auf eine eindeutig bestimmte reguläre Korrelation konjugiert sind [2]).

Satz VII: Zerlegt man die Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punkten in irgend zwei Gruppen von je drei Punkten, so liefern diese je ein Poldreieck eines eindeutig bestimmten regulären Hermiteschen Geradenkomplexes [3]).

Speziell gilt der

Satz 7a: Zerlegt man die Ecken eines Pascalschen Sechsecks willkürlich in irgend zwei Gruppen von je drei Punkten, so liefern diese je ein Polardreieck einer eindeutig bestimmten Kurve 2. Klasse.

Die Sätze 7 (VII) und 7a lassen sich umkehren:

Satz 8: Zwei Paare von Dreiecken $p^1p^2p^3$, $q^1q^2q^3$ und $p^4p^5p^6$, $q^4q^5q^6$ seien in bezug auf eine eindeutig

Satz VIII: Die Ecken zweier Dreiecke 123 und 456, die gleichzeitig Poldreiecke eines eindeutig bestimmten

[1]) Die Gleichung des mit dem Geradenkomplex $(pu)(\overline{pu}) = 0$ verbundenen Polarsystems lautet $(pu)(\overline{pv}) = 0$.

[2]) J. Rosanes II a. a. O. S. 307.

[3]) E. Study a. a. O. S. 348.

bestimmte reguläre Korrelation konjugiert. Dann bilden die Punktepaare (p^1, q^1), (p^2, q^2), $\cdots$, (p^6, q^6) *eine Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren* [1]).

regulären Hermiteschen Geradenkomplexes sind, bilden eine Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punkten [2]).

Um den Satz 8 zu beweisen, haben wir lediglich zu benutzen, daß die sechs Punktepaare (p^i, q^i) auf sechs Punkte $[1], [2], \cdots, [6]$ der $M_4{}^6$ derart abgebildet werden, daß sich die Ebenen $\langle 1\,2\,3\rangle$ und $\langle 4\,5\,6\rangle$ in einem eindeutig bestimmten Punkte schneiden. Die Punkte $[1], [2], \cdots, [6]$ liegen daher in einem und nur einem R_4. W.b.z.w.

Als Spezialfall von Satz 8 gilt:

Satz 8a: Die Ecken zweier Dreiecke 1 2 3 und 4 5 6, die gleichzeitig Polardreiecke einer eindeutig bestimmten regulären Kurve 2. Klasse sind, bilden ein Pascalsches Sechseck.

Aus Satz 8 (VIII) ergibt sich schließlich folgende

Zweite Konstruktion

des von fünf vorgegebenen Punktepaaren $(p^1, q^1), (p^2, q^2), \ldots, (p^5, q^5)$ im Grade 1 abhängigen Punktepaares (p^6, q^6).

des von fünf vorgegebenen Punkten $1, 2, \ldots, 5$ im Grade 1 abhängigen Punktes 6.

Satz 9: Man zerlege die fünf Punktepaare in irgend zwei Gruppen von drei bzw. zwei Punktepaaren, z. B. (p^1, q^1), (p^2, q^2), (p^3, q^3) *und* (p^4, q^4), (p^5, q^5). *Dann konstruiere man diejenige eindeutig bestimmte Korrelation, in bezug auf welche die Dreiecke* $p^1 p^2 p^3$, $q^1 q^2 q^3$ *konjugiert sind, während die dem Punkt* p^4 (q^4) *zugeordnete Gerade durch* q^5 (p^5) *geht. Diese Korrelation ordnet* $q^4 q^5$ *den Punkt* p^6 *und* $p^4 p^5$ *den Punkt* q^6 *zu* [3]).

Satz IX: Man zerlege die fünf Punkte in irgend zwei Gruppen von drei bzw. zwei Punkten, z. B. 1, 2, 3 und 4, 5. Dann konstruiere man dasjenige eindeutig bestimmte Hermitesche Polarsystem, in bezug auf welches 1 2 3 Poldreieck ist, während die dem Punkt 4 (5) zugeordnete Gerade durch 5 (4) geht. Dieses Polarsystem ordnet der Geraden 4 5 den Punkt 6 zu.

Daß das sechste Punktepaar (der sechste Punkt) wieder eindeutig bestimmt ist, sehen wir ein, wenn wir nach der Art des Zusammenhangs zwischen den in den Sätzen 6 und 9 (VI und IX) angegebenen Konstruktionen fragen. Es ergibt sich, daß sich die zweite auf die erste zurückführen läßt. Bei der zweiten Konstruktion müssen wir

---

[1]) J. Rosanes II a. a. O. S. 307.
[2]) E. Study a. a. O. S. 348.
[3]) J. Rosanes II a. a. O. S. 309.

nämlich von dem folgenden hier als bekannt vorausgesetzten Satz Gebrauch machen:

Wird eine Korrelation durch ein Paar konjugierter Dreiecke $p^1 p^2 p^3$ und $q^1 q^2 q^3$ und dadurch bestimmt, daß man einem Punkt p^4 eine Gerade b und einem Punkt q^4 eine Gerade a zuordnet, so dürfen — wie die Abzählung der Bedingungen, welche eine Korrelation bestimmen, zeigt — die Geraden a, b nicht mehr beliebig gewählt werden. Sie müssen sich vielmehr in der Kollineation entsprechen, welche die Punkte p^1, p^2, p^3, p^4 der Reihe nach in q^1, q^2, q^3, q^4 überführt.

Wird ein Hermitesches Polarsystem durch ein Poldreieck 1 2 3 und dadurch bestimmt, daß man einem Punkt 4 eine Gerade a zuordnet, so darf — wie die Abzählung der Bedingungen, welche ein Hermitesches Polarsystem bestimmen, zeigt — die Gerade a nicht mehr beliebig gewählt werden. Sie muß vielmehr so gewählt werden, daß sie die ternäre Kette durch die Punkte 1, 2, 3, 4 in einer binären Kette durchdringt.

10. Nachtrag.

In diesem Abschnitt wollen wir die auf S. 11 offen gebliebene Frage entscheiden, wann das (der) von fünf vorgegebenen Punktepaaren (Punkten) im Grade 1 abhängige sechste mit einem von diesen zusammenfällt.

Zu diesem Zwecke gehen wir aus von dem

Satz 10: In einer Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren ist z. B. das Doppelverhältnis, unter dem die Punkte p^1, p^2, p^3, p^4 vom Punkte p^5 aus projiziert werden, gleich dem Doppelverhältnis, unter dem die Punkte q^1, q^2, q^3, q^4 vom Punkte q^6 aus projiziert werden[1]).

Satz X: In einer Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punkten ist z. B. das Doppelverhältnis, unter dem die Punkte 1, 2, 3, 4 vom Punkte 5 aus projiziert werden, konjugiert komplex zu dem Doppelverhältnis, unter dem diese Punkte vom Punkte 6 aus projiziert werden[2]).

Für Satz 10 geben wir im Anschluß an Satz 2 einen neuen Beweis: Wir projizieren p^1, p^2, p^3, p^4 von p^5 aus z. B. auf $p^1 p^2$ und erhalten die Punkte $p^1, p^2, p^{3'}, p^{4'}$; dann projizieren wir q^1, q^2, q^3, q^4, von q^6 aus auf $q^1 q^2$ und erhalten die Punkte $q^1, q^2, q^{3'}, q^{4'}$. Berücksichtigen wir, daß die Projektivitäten [1 2], [3 4], [5 6] des Satzes 2 ein Tripel linear-abhängiger Projektivitäten bilden, so können wir

[1]) J. Rosanes I S. 253.
[2]) E. Study a. a. O. S. 348.

nach dem Satz über Tripel linear-abhängiger Projektivitäten sagen, daß [1 2] die Zuordnung

$$p^1 \to q^2$$
$$p^2 \to q^1$$
$$p^{3'} \to q^{4'}$$
$$p^{4'} \to q^{3'}$$

bewirkt. Daraus folgt aber

D. V. $(p^1 p^2 p^{3'} p^{4'}) =$ D. V. $(q^2 q^1 q^{4'} q^{3'}) =$ D. V. $(q^1 q^2 q^{3'} q^{4'})$. W. z. b. w.

Satz X läßt sich analog im Anschluß an Satz II beweisen.

Jetzt können wir sagen:

Satz 11: Damit das Punktepaar (p^6, q^6) mit (p^5, q^5) zusammenfällt, ist notwendig, daß die Punkte p^1, p^2, p^3, p^4 von p^5 unter demselben Doppelverhältnis projiziert werden wie die Punkte q^1, q^2, q^3, q^4 von q^5. Wir zeigen: *Diese Bedingung ist auch hinreichend.*

Satz XI: Damit der Punkt 6 mit 5 zusammenfällt, ist notwendig, daß die Punkte 1, 2, 3, 4 von 5 aus durch die Geraden einer binären Geradenkette projiziert werden. Diese Bedingung ist auch hinreichend.

In der Tat: Unter der angegebenen Voraussetzung bilden die Punktepaare $(p^1, q^1), \ldots, (p^5, q^5)$, $(p^6 = p^5, q^6 = q^5)$ eine Figur von sechs Punktepaaren, die den für eine Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren charakteristischen Eigenschaften des Satzes 10 genügt.

Satz 11 (XI) läßt sich auch in folgender Form aussprechen:

Satz 11a: Damit das Punktepaar (p^6, q^6) mit keinem der fünf vorgegebenen Punktepaare zusammenfällt, ist notwendig und hinreichend, daß keiner der Hauptpunkte der Korrelationen $(a\,x)(b\,y) = 0$ vom Rang 2, in bezug auf welche die Punkte der fünf vorgegebenen Punktepaare konjugiert sind, mit den Punkten eines dieser Punktepaare zusammenfällt.

Satz XIa: Damit der sechste Punkt mit keinem der fünf vorgegebenen Punkte zusammenfällt, ist notwendig und hinreichend, daß keiner der Hauptpunkte der Hermiteschen Punktkomplexe vom Rang 2, die durch die fünf vorgegebenen Punkte laufen, mit einem dieser Punkte zusammenfällt[1]).

[1]) E. Study a. a. O. S. 347.

11. Verallgemeinerung der Konstruktion des Satzes 9 (IX) im R_n.

Die für die Ebene geltenden Sätze über die Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) können im R_n verallgemeinert werden. Hier soll uns die Verallgemeinerung des Satzes 9 (IX) beschäftigen. Sie liefert:

Satz 12: Man nehme $n+3$ aus den Punkten zweier R_n gebildete Punktepaare
$(p^1, q^1), (p^2, q^2), \ldots, (p^{n+3}, q^{n+3})$
mit folgender Eigenschaft:

1. Keine $n+1$ Punkte $p^i (q^i)$ sollen in einem R_{n-1} liegen.
2. Es gibt keine Kollineation
   $p^i \to q^i \; (i = 1, 2, \ldots, n+3)$.

Diese $n+3$ Punktepaare zerlege man in irgend zwei Gruppen von $n+1$ bzw. 2 Punktepaaren, z. B. $(p^1, q^1), (p^2, q^2), \ldots, (p^{n+1}, q^{n+1})$ und (p^{n+2}, q^{n+2}), (p^{n+3}, q^{n+3}) und konstruiere eine bestimmte von den ∞^{n-2} Korrelationen, in bezug auf welche die Simplexe $p^1 p^2 \ldots p^{n+1}$; $q^1 q^2 \ldots q^{n+1}$ konjugiert sind, während der dem Punkt p^{n+2} (q^{n+2}) zugeordnete R_{n-1} durch q^{n+3} (p^{n+3}) geht. Dann kann man die $n+3$ vorgegebenen Punktepaare auf $\infty^{(n-1)(n-2)}$ verschiedene Weisen durch $n-1$ weitere Punktepaare $(p^{n+4}, q^{n+4}), \ldots, (p^{2n+1}, q^{2n+1})$ ergänzen, so daß auch die Simplexe $p^{n+2} p^{n+3} \ldots p^{2(n+1)}$, $q^{n+2} q^{n+3} \ldots q^{2(n+1)}$ in bezug auf diese Korrelation konjugiert sind:
Zu diesem Zweck wähle man z. B. in dem $R_{n-2}^{(p)}$, in welchem sich die den Punkten q^{n+2}, q^{n+3} zugeordneten R_{n-1} schneiden, den Punkt p^{n+4} beliebig und in dem

Satz XII: Man nehme $n+3$ Punkte des R_n mit folgender Eigenschaft:

1. Keine $n+1$ Punkte sollen in einem R_{n-1} liegen.
2. Die $n+3$ Punkte sollen nicht durch eine $(n+2)$-dimensionale Kette verbunden werden können.

Diese $n+3$ Punkte zerlege man in 2 Gruppen von $n+1$ bzw. 2 Punkten, z. B. $1, 2, \ldots, n+1$ und $n+2$, $n+3$, und konstruiere ein bestimmtes von den ∞^{n-2} Hermiteschen Polarsystemen, in bezug auf welches der Simplex $1\,2 \ldots n+1$ Polsimplex ist, während der dem Punkt $n+2$ zugeordnete R_{n-1} durch $n+3$ geht. Dann kann man die $n+3$ vorgegebenen Punkte auf $\infty^{(n-1)(n-2)}$ verschiedene Weisen durch $n-1$ weitere Punkte $n+4, n+5, \ldots, 2(n+1)$ ergänzen, so daß auch der Simplex $n+2, n+3, \ldots, 2(n+1)$ ein Polsimplex dieses Hermiteschen Polarsystems ist:

Zu diesem Zweck wähle man z. B. in dem R_{n-2}, in welchem sich die den Punkten $n+2$, $n+3$ zugeordneten R_{n-1} schneiden, den Punkt $n+4$ beliebig. Den diesem

$R^{(q)}_{n-2}$, in welchem sich die den Punkten p^{n+2}, p^{n+3} zugeordneten R_{n-1} schneiden, den Punkt q^{n+4} beliebig. Den q^{n+4} zugeordneten R_{n-1} bringe man mit dem $R^{(p)}_{n-2}$ zum Schnitt und wähle in der Schnittmannigfaltigkeit $R^{(p)}_{n-3}$ den Punkt p^{n+5} beliebig; den p^{n+4} zugeordneten R_{n-1} bringe man mit dem $R^{(q)}_{n-2}$ zum Schnitt und wähle in der Schnittmannigfaltigkeit $R^{(q)}_{n-3}$ den Punkt q^{n+5} beliebig, usw.

Punkt zugeordneten R_{n-1} bringe man mit jenem R_{n-2} zum Schnitt und wähle in der Schnittmannigfaltigkeit R_{n-3} den Punkt $n+5$ beliebig, usw.

Man kann also die $n+3$ vorgegebenen Punktepaare auf insgesamt $\infty^{n(n-2)}$ verschiedene Weisen zu einer Figur von $2(n+1)$ Punktepaaren so ergänzen, daß die Simplexe zweier in geeigneter Weise aus diesen Punktepaaren gebildeten Simplexpaare in bezug auf eine eindeutig bestimmte Korrelation konjugiert sind.

Man kann also die $n+3$ vorgegebenen Punkte auf insgesamt $\infty^{n(n-2)}$ verschiedene Weisen zu einer Figur von $2(n+1)$ Punkten so ergänzen, daß zwei in geeigneter Weise aus diesen Punkten gebildete Simplexe Polsimplexe eines eindeutig bestimmten Hermiteschen R_{n-1}-Komplexes sind.

Indem wir weiter die in § 1 beschriebene Abbildung verallgemeinern — also

die korrelativen Beziehungen zwischen den beiden R_n, im Spezialfall die aus den Punkten der beiden R_n gebildeten Punktepaare

die Hermiteschen Komplexe des R_n, im Spezialfall die Punkte des (komplexen) R_n

nach dem dort beschriebenen Verfahren abbilden — und Überlegungen analog zu denen anstellen, die uns auf Satz 8 (VIII) führten, können wir schließlich sagen:

Ergänzt man $n+3$ Punktepaare nach der angegebenen Vorschrift zu einer Figur von $2(n+1)$ Punktepaaren, so erhält man eine Figur von $2(n+1)$ im Grade 1 abhängigen Punktepaaren[1]).

Ergänzt man $n+3$ Punkte nach der angegebenen Vorschrift zu einer Figur von $2(n+1)$ Punkten, so erhält man eine Figur von $2(n+1)$ im Grade 1 abhängigen Punkten.

[1]) G. Castelnuovo, Su certi gruppi associati di punti, R. del Circolo Matematico di Palermo III, 1889, S. 185. Für $n=3$ gibt J. Rosanes diese

Die ebene Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) ist der einfachste Repräsentant der in Satz 12 (XII) beschriebenen Figuren. Im zweiten Teil dieser Arbeit werden wir die entsprechende Figur des Raumes behandeln, also die räumliche Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten).

§ 3. Über gewisse ebene Konfigurationen.

In diesem Paragraphen wollen wir auf Grund von Satz 2 eine Figur von 30 Punkten und 95 Geraden ableiten, die zahlreiche, vor allem von O. Hesse[1]), J. de Vries[2]) und H. Schroeter[3]) behandelte Konfigurationen enthält. Ein Spezialfall dieser Figur ergibt sich auf Grund von Satz 2a. Wir erhalten so einen Beitrag zur Theorie des Pascalschen Sechsecks, dessen Zusammenhang mit Untersuchungen von L. Klug[4]) wir leicht erkennen werden.

12. Die allgemeine Figur.

Aus Satz 2 (und dem Satz über linear-abhängige Projektivitäten) folgt:

Satz 13: *Den Schnittpunkten einer Geraden u allgemeiner Lage mit den Verbindungsgeraden $p^i p^j$ der Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (p^i, q^i), $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ werden auf den Verbindungsgeraden $q^i q^j$ vermöge je zweier in bezug auf die Punktepaare (p^i, q^i), (p^j, q^j) harmonischer Projektivitäten $[ij], [\overline{ij}]$ zwei Punkte $[ij], [\overline{ij}]$ zugeordnet, so daß je drei Punkte*

$$[ij] \quad [kl] \quad [mn], \qquad [\overline{jk}] \quad [ki] \quad [ij], \qquad [\overline{jk}] \quad [\overline{ki}] \quad [\overline{ij}]$$

auf einer Geraden

$$(ij, kl, mn) \qquad (\overline{jk}, ki, ij) \qquad (\overline{jk}, \overline{ki}, \overline{ij})$$

Konstruktion an (J. Rosanes II S. 319). Er untersucht aber nicht die später von uns behandelten Fälle, in denen das achte Punktepaar mit einem der sieben vorgegebenen zusammenfällt bzw. unbestimmt wird (vgl. S. 47 Anm.).

[1]) O. Hesse, Über Kurven dritter Ordnung; Crelles J. **36**, 1848; S. 143 ff.

[2]) J. de Vries, Über gewisse ebene Konfigurationen; Acta Math. **12**, 1884, S. 63 ff.

[3]) H. Schroeter, Die Hessesche Konfiguration $(12_4, 16_3)$; Crelles J. **108**, 1891, S. 267 ff.

[4]) L. Klug, Desmische Vierecke; Math. Nat. Ber. aus Ungarn **38**, 1932, S. 1 ff.

liegen. Insgesamt erhält man auf diese Weise 30 Punkte und 95 Geraden, und zwar

a) eine Konfiguration $(15_3, 15_3)$ *von Punkten* $[ij]$ *und Geraden* (ij, kl, mn);

b) eine Konfiguration $(15_4, 20_3)$ *von Punkten* $[\overline{ij}]$ *und Geraden* $(\overline{jk}, \overline{ki}, \overline{ij})$;

c) eine Konfiguration $(30_8, 80_3)$ *von Punkten* $[ij]$, $[\overline{ij}]$ *und Geraden* $(\overline{jk}, ki, ij)$, $(\overline{jk}, \overline{ki}, \overline{ij})$.

Die einzelnen Konfigurationen haben folgende Eigenschaften:

a) Die Konfiguration $(15_3, 15_3)$ *enthält zehn verschiedene Konfigurationen* $(6_3, 9_2)$. *Die sechs Geraden einer solchen Konfiguration liegen auf einer Kurve zweiter Klasse. Die Konfiguration* $(15_3, 15_3)$ *kann man daher auch als eine Segresche Konfiguration* $(15_4, 10_6)$ *von Geraden und Kurven zweiter Klasse betrachten.*

Auf diesen Zusammenhang werden wir durch analoge Betrachtungen geführt, wie sie beim Hexastigma für die Ableitung der Segreschen Konfiguration $(15_4, 10_6)$ der Transversalen und Hauptflache nötig waren. Danach bilden z. B. die Punkte

	I	II	III
I′	[1 4]	[2 5]	[3 6]
II′	[2 6]	[3 4]	[1 5]
III′	[3 5]	[1 6]	[2 4]

eine der zehn Konfigurationen $(6_3, 9_2)$. Sie liegen zu je dreien auf den Geraden I, II, III und I′, II′, III′. Verbindet man die Schnittpunkte (II, III′) mit (III, II′); (III, I′) mit (I, III′); (I, II′) mit (II, I′), so laufen die Verbindungsgeraden durch den Punkt $[\overline{5\,6}]$, d. h. die sechs Geraden der Konfiguration bilden ein Brianchonsches Sechsseit, sie liegen auf einer Kurve zweiter Klasse.

Die 15 Geraden (ij, kl, mn) haben also eine der Eigenschaften, welche für die 15 Verbindungslinien der Eckpunkte eines Pascalschen Sechsecks besonders charakteristisch ist[1]). Damit erschöpft sich aber die Analogie zwischen diesen beiden Geradenfiguren. Insbesondere kann man aus den 15 Geraden (ij, kl, mn) keine 60 Pascalschen Sechsseite bilden, die bekanntlich dadurch ausgezeichnet sind, daß

[1]) In bezug auf das Pascalsche Sechseck vgl. Veronese, Nuovi teoremi sull' Hexagrammum Mysticum, Atti d. R. Accad. de Lincei, (3) 1, 1877, S. 642 ff.

die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden liegen. Statt dessen gilt:

Die Konfiguration $(15_3, 15_3)$ *enthält 60 Sechsseite, die dadurch ausgezeichnet sind, daß die zu den Schnittpunkten* $[ij]$ *gegenüberliegender Seiten eines solchen Sechsseits harmonischen Punkte* $[\overline{ij}]$ *auf einer Geraden liegen.*

Zum Beweise ordnen wir nach der folgenden Tabelle der Kombination von je zwei der Buchstaben $a, b, \ldots, f$ eine bestimmte Gerade (ij, kl, mn) zu:

ab	12, 34, 56	bc	16, 24, 35	ce	14, 23, 56
ac	13, 25, 46	bd	15, 23, 46	cf	15, 26, 34
ad	14, 26, 35	be	13, 26, 45	de	16, 25, 34
ae	15, 24, 36	bf	14, 25, 36	df	13, 24, 56
af	16, 23, 45	cd	12, 36, 45	ef	12, 35, 46

Nach dieser Tabelle kann man — indem man die Elemente $a, b, \ldots, f$ entsprechend permutiert — 60 Sechsseite ab, bc, cd, de, ef, fa mit der oben bezeichneten Eigenschaft bilden; z. B. das Sechsseit mit den gegenüberliegenden Seiten

$$(12, 34, 56), (16, 24, 35), (12, 36, 45)$$
$$(16, 25, 34), (12, 35, 46), (16, 23, 45);$$

Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten sind in diesem Beispiel die Punkte

$$[34] \qquad [35] \qquad [45].$$

Die zu ihnen harmonischen Punkte liegen auf der Geraden

$$(\overline{45}, \overline{53}, \overline{34}).$$

Wir zeigen jetzt weiter:

b) *Die Konfiguration* $(15_4, 20_3)$ *ist die Cayleysche Konfiguration*[1]. *Sie läßt sich auf zehn verschiedene Weisen aus zwei Tripeln von vollständigen Vierseiten zusammensetzen, so daß gilt: Die Vierseite ein und desselben Tripels haben drei Punkte gemeinsam, welche auf einer Geraden liegen; die übrigen neun Punkte gehören beiden Tripeln an.*

---

[1]) A. Cayley, Sur quelques théorèmes de la géométrie de position, Crelles J. **31**, 1846, S. 215 f.

Die Konfiguration $(15_4, 20_3)$ *enthält ferner sechs Desarguessche Konfigurationen* $(10_3, 10_3)$.

Die Gegenpunkte eines der in der Konfiguration $(15_4, 20_3)$ enthaltenen vollständigen Vierseits bilden wir aus je vier von den sechs Ziffern $1, 2, \ldots, 6$. So z. B. sind die Punkte

$$[\overline{12}]\ [\overline{34}]; \quad [\overline{13}]\ [\overline{24}]; \quad [\overline{14}]\ [\overline{23}]$$

Gegenpunkte eines vollständigen Vierseits, das von den vier Geraden

$$(\overline{12},\ \overline{23},\ \overline{31})$$
$$(\overline{12},\ \overline{24},\ \overline{41})$$
$$(\overline{34},\ \overline{41},\ \overline{13})$$
$$(\overline{34},\ \overline{42},\ \overline{23})$$

gebildet wird. Zwei Tripel vollständiger Vierseite, welche die ganze Konfiguration $(15_4, 20_3)$ zusammensetzen, erhält man z. B., indem man nach dem soeben angegebenen Verfahren die vollständigen Vierseite bildet, in denen die Ziffern

$$1234, \quad 1235, \quad 1236 \text{ und } 4561, \quad 4562, \quad 4563$$

auftreten. Die aus den Ziffern 1, 2, 3 gebildeten Punkte $[\overline{23}]$, $[\overline{31}]$, $[\overline{12}]$ sind allen Vierseiten des ersten Tripels gemeinsam, die aus den Ziffern 4, 5, 6 gebildeten Punkte $[\overline{56}]$, $[\overline{64}]$, $[\overline{45}]$ allen Vierseiten des zweiten Tripels.

Die Punkte einer der in der Konfiguration $(15_4, 20_3)$ enthaltenen Desarguesschen Konfigurationen $(10_3, 10_3)$ bilden wir aus je fünf von den sechs Ziffern $1, 2, \ldots, 6$. So z. B. liefern die Punkte

$$\begin{array}{ccc} [\overline{13}] & [\overline{14}] & [\overline{15}] \\ [\overline{23}] & [\overline{24}] & [\overline{25}] \\ & [\overline{12}] & \\ [\overline{45}] & [\overline{53}] & [\overline{34}] \end{array}$$

eine Desarguessche Konfiguration; wir haben sie so angegeben, daß man unmittelbar zwei in dieser Konfiguration enthaltene perspektive Dreiecke, deren Perspektivitätszentrum und deren Perspektivitätsachse erkennt. —

Um die Konfiguration $(30_8, 80_8)$ zu untersuchen, bilden wir schließlich aus je vier von den sechs Ziffern $1, 2, \ldots, 6$, z. B. den Ziffern 1, 2, 3, 4 die Punkte

$$
\begin{array}{lccccccccc}
 & [12] & [13] & [14] & \text{und} & [\overline{12}] & [\overline{13}] & [\overline{14}] \\
(*) & & [23] & [24] & & & [\overline{23}] & [\overline{24}] \\
 & & & [34] & & & & [\overline{34}]
\end{array}
$$

und ordnen die Geraden $(\overline{jk}, ki, ij)$, $(\overline{jk}, \overline{ki}, \overline{ij})$, auf denen sie liegen, nach dem folgenden Schema an:

$\overline{23}$	$\overline{12}$	$\overline{31}$	$\overline{23}$	$\overline{34}$	$\overline{24}$	$\overline{23}$	12	31	$\overline{23}$	34	24
$\overline{41}$	$\overline{12}$	$\overline{24}$	$\overline{41}$	$\overline{34}$	$\overline{31}$	$\overline{41}$	12	24	$\overline{41}$	34	31
23	$\overline{12}$	31	23	$\overline{34}$	24	23	12	$\overline{31}$	23	34	$\overline{24}$
41	$\overline{12}$	24	41	$\overline{34}$	31	41	12	$\overline{24}$	41	34	$\overline{31}$

Danach erkennen wir, daß durch jeden der zwölf Punkte (*) vier Geraden laufen und daß man insgesamt 16 Geraden erhält, auf denen jeweils drei von den zwölf Punkten liegen. Wir haben es also mit einer Konfiguration $(12_4, 16_3)$ zu tun. J. de Vries hat gezeigt, daß zwei Konfigurationen $(12_4, 16_3)$ möglich sind, die er durch die Indizes A und B unterscheidet[1]). H. Schroeter hat die Punkte und Geraden der Konfiguration $(12_4, 16_3)$ A in einem Schema zusammengestellt, zu dem unser Schema analog ist, und gezeigt, daß man die Konfiguration als System von drei Vierecken in „desmischer Lage" auffassen kann: Je zwei Vierecke sind vierfach, und zwar von den Ecken des dritten Vierecks aus perspektiv[2]).

Die Konfiguration $(12_4, 16_3)$ A ist zum erstenmal von O. Hesse im Zusammenhang mit Untersuchungen über ebene Kurven dritter Ordnung behandelt worden. Man bezeichnet sie daher auch als Hessesche Konfiguration. Wir können also sagen:

c) *Die Konfiguration* $(30_8, 80_3)$ *enthält 15 Hessesche Konfigurationen* $(12_4, 16_3)$ *von drei Vierecken in desmischer Lage.*

13. Die spezielle Figur.

Im Spezialfall ergibt sich aus Satz 2a (und dem Satz über linear-abhängige Involutionen):

Satz 13a: Den Schnittpunkten einer Geraden u allgemeiner Lage mit den Verbindungsgeraden ij des von den Punkten 1, 2, ..., 6 gebildeten Pascalschen Sechsecks werden auf diesen Geraden vermöge der in bezug

[1]) J. de Vries a. a. O. S. 67.
[2]) H. Schroeter a. a. O. S. 271 u. 277 ff.

auf die Punkte i, j harmonischen Involutionen $[ij], [\overline{ij}]$ zwei Punkte $[ij]$ und $[\overline{ij}]$ zugeordnet, so daß die Punkte

$$[ij]\ [kl]\ [mn] \quad [\overline{jk}]\ [ki]\ [ij] \quad [\overline{jk}]\ [\overline{ki}]\ [\overline{ij}]$$

auf einer Geraden

$$(ij, kl, mn) \quad (\overline{jk}, ki, ij) \quad (\overline{jk}, \overline{ki}, \overline{ij})$$

liegen. Insgesamt erhält man auf diese Weise 30 Punkte und 95 Geraden, und die von diesen gebildete Figur hat dieselben Eigenschaften wie die in Satz 13 beschriebene Figur.

Man nennt nun ein Vierseit Polarvierseit eines Kegelschnitts, wenn die Gegenpunkte desselben in bezug auf diesen Kegelschnitt konjugiert sind. Die Ruhepunkte z. B. der Involution [1 2], welche auf der Verbindungsgeraden 1 2 von dem Kegelschnittbüschel durch die Punkte 3, 4, 5, 6 ausgeschnitten wird, sind in bezug auf den durch die Punkte $1, 2, \ldots, 6$ laufenden Kegelschnitt konjugiert. Nach Satz 2 a und dem Satz über linear-abhängige Involutionen ist weiter unschwer einzusehen, daß die Ruhepunktepaare der einzelnen Involutionen des Tripels [1 2], [3 4], [5 6] Gegenpunktepaare eines vollständigen Vierseits, also Gegenpunktepaare eines Polarvierseits des durch die Punkte $1, 2, \ldots, 6$ laufenden Kegelschnitts sind. Insgesamt erhält man auf diese Weise 15 Polarvierseite jenes Kegelschnitts. Sie bilden den Ausgangspunkt der Konfiguration von L. Klug. Ihre Eigenschaften kann man wieder — wie das E. A. Weiss getan hat[1]) — aus dem Hexastigma, nun aber mit Hilfe der Abbildung der Kurven zweiter Klasse auf die Punkte des R_5 (Veronesesche Abbildung), herleiten.

---

[1]) E. A. Weiss, Die Konfiguration von L. Klug und das Hexastigma; Tôhoku Math. Journ. **38**, 1933, S. 431.

Zweiter Teil.

Abhängige Punktfiguren des Raumes.

§ 4. Die Abbildung von C. Segre.

Wir verallgemeinern jetzt die Untersuchungen des ersten Teils unserer Arbeit, bilden also — analog wie in § 1 — zunächst die räumlichen Korrelationen und Hermiteschen Komplexe ab.

14. Abbildung der räumlichen Korrelationen auf die Punkte des R_{15}.

Die zu den Bilinearformen

$$(6) \qquad (pu)(qv), \quad (p_i q_k = p_{ik};\ i,k = 0,1,2,3)$$

gehörenden korrelativen Verwandtschaften zwischen zwei (solange nicht ausdrücklich anders verfügt wird, verschiedenen) Räumen bilden wir auf die komplexen Punkte des R_{15} ab. Die zu den Bilinearformen

$$(7) \qquad (ax)(by), \quad (a_i a_k = a_{ik};\ i,k = 0,1,2,3)$$

gehörenden korrelativen Verwandtschaften zwischen den beiden Räumen müssen wir dann den komplexen R_{14} des R_{15} zuordnen.

Dann entspricht dem Konjugiertsein zweier durch die Gleichungen

$$(ax)(by) = 0 \quad \textit{und} \quad (pu)(qv) = 0$$

gegebenen Korrelationen die vereinigte Lage ihres Bildpunktes X und Bild-R_{14} U.

Die zu den Formen (6) vom Rang 3 gehörenden Korrelationen sind durch eine reguläre korrelative Verwandtschaft zwischen zwei „Hauptebenen“ bestimmt: Eine Ebene des ersten Raumes schneidet die erste Hauptebene in einer Geraden; ihr wird derjenige Punkt in der zweiten Hauptebene zugeordnet, der jener Geraden vermöge der korrelativen Verwandtschaft zugeordnet ist. Der Hauptebene selbst wird kein bestimmter Punkt zugeordnet. *Die Korrelationen vom Rang 3 oder, was dasselbe ist, die korrelativen Verwandtschaften zwischen zwei Ebenen werden auf die Punkte einer M_{14}^4 abgebildet.*

Die zu den Formen (6) vom Rang 2 gehörenden Korrelationen sind durch eine projektive Beziehung zwischen den Punkten zweier „Hauptgeraden“ bestimmt: Eine Ebene allgemeiner Lage des ersten Raumes schneidet die erste Hauptgerade in einem Punkt; ihr wird derjenige Punkt auf der zweiten Hauptgeraden zugeordnet, der jenem Punkt vermöge der projektiven Beziehung zugeordnet ist. Einer Ebene durch die erste Hauptgerade wird kein bestimmter Punkt zugeordnet. *Die Korrelationen vom Rang 2 oder, was dasselbe ist, die projektiven Beziehungen zwischen den Punkten zweier Geraden werden auf die Punkte einer ganz auf der $M_{14}^{\ 4}$ gelegenen $M_{11}^{\ 20}$ abgebildet*[1]).

Die zu den Formen (6) vom Rang 1 gehörenden Korrelationen sind durch ein Punktepaar bestimmt: Einer Ebene allgemeiner Lage des ersten Raumes wird ein und derselbe Punkt des zweiten Raumes zugeordnet. Den Ebenen durch einen im ersten Raum ausgezeichneten Punkt wird kein bestimmter Punkt des zweiten Raumes zugeordnet. *Die Korrelationen vom Rang 1 oder, was dasselbe ist, die aus den Punkten zweier Räume gebildeten Punktepaare (p, q) werden auf die Punkte einer ganz auf der $M_{11}^{\ 20}$ gelegenen $M_6^{\ 20}$ abgebildet.*

Die $M_{14}^{\ 4}$ ist der Ort aller Ebenen, die irgend drei Punkte der $M_6^{\ 20}$ verbinden. *Jeder Punkt einer Ebene, die drei Punkte der $M_6^{\ 20}$-Bilder der Punktepaare (p^1, q^1), (p^2, q^2), (p^3, q^3), $(p^1 p^2 p^3 x) \equiv\!\!\!\equiv 0 \{x\}$, $(q^1 q^2 q^3 y) \equiv\!\!\!\equiv 0 \{y\}$ — verbindet, wird auf eine korrelative Verwandtschaft zwischen den Ebenen $\langle p^1 p^2 p^3 \rangle$ und $\langle q^1 q^2 q^3 \rangle$ abgebildet, in bezug auf welche die Dreiecke $p^1 p^2 p^3$ und $q^1 q^2 q^3$ konjugiert sind*[2]).

Die $M_{11}^{\ 20}$ ist der Ort aller Sehnen der $M_6^{\ 20}$. *Jeder Punkt einer nicht ganz auf der $M_6^{\ 20}$ gelegenen Sehne der $M_6^{\ 20}$, deren Endpunkte Bilder der Punktepaare (p^1, q^1), (p^2, q^2) sind, wird auf eine projektive Beziehung zwischen den Punkten der Geraden $p^1 p^2$ und $q^1 q^2$ abgebildet, in der sich die Punkte p^1, q^2 und p^2, q^1 entsprechen.*

15. Das Bild von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren im R_{15}.

Ein Punktepaar, dessen Punkte in bezug auf eine durch die Gleichung $(a\,x)(b\,y) = 0$ gegebene Korrelation konjugiert sind, wird jetzt auf einen Punkt der $M_6^{\ 20}$ abgebildet, der in dem Bild-R_{14} dieser Korrelation liegt. r im Grade s abhängige Punktepaare werden

[1]) Die Ordnung dieser $M_{11}^{\ 20}$ wurde nach einem Satz von G. Z. Giambelli bestimmt; vgl. Rend. Acc. Lincei (5) **12**, 1903, S. 294; Mem. Ist. Lomb. (3) **11**, 1904, S. 101.

[2]) Der abzubildende Punkt darf nicht auf einer Seite des von den drei Punkten der $M_6^{\ 20}$ aufgespannten Dreiecks liegen.

auf r Punkte der M_6^{20} abgebildet, die (in Bezug auf Räume R_{14}) abhängig im Grade s sind. Daraus folgt:

Acht im Grade 1 abhängige Punktepaare werden auf acht Punkte der M_6^{20} abgebildet, die in einem und nur einem R_6 liegen.

Im allgemeinen schneidet der von 7 vorgegebenen Punkten der M_6^{20} aufgespannte R_6 die M_6^{20} in keinem weiteren Punkt; d. h.: Im allgemeinen liefern sieben vorgegebene Punktepaare kein achtes im Grade 1 abhängiges Punktepaar.

Sechs vorgegebene Punktepaare $(p^1, q^1), (p^2, q^2), \ldots, (p^6, q^6)$ sollen folgenden Voraussetzungen genügen:

1. Keine vier Punkte p^i (q^i) sollen in einer Ebene liegen.
2. Es gibt keine Kollineation $p^i \to q^i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$.

Dann kann man sie nach Satz 12 auf ∞^3 Weisen zu einer Figur von sieben Punktepaaren ergänzen, die jedesmal ein achtes eindeutig bestimmtes im Grade 1 abhängiges Punktepaar liefert. Wir behandeln im folgenden — von der weiter unten beschriebenen speziellen Figur abgesehen — nur diese Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren [1]).

Auf eine spezielle Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren werden wir geführt, wenn wir in bezug auf die Lage von sieben vorgegebenen Punktepaaren (p^1, q^1), $(p^2, q^2), \ldots, (p^7, q^7)$ die Voraussetzung machen, daß es eine Kollineation $p^i \to q^i$, $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ gibt. Alle Punktepaare aus Punkten, die einander vermöge einer regulären Kollineation zugeordnet sind, werden auf die Punkte einer ganz auf der M_6^{20} gelegenen M_3^8 abgebildet, wie sie sich bei der Abbildung der Flächen zweiter Klasse des Raumes auf die Punkte des R_9 als Bildmannigfaltigkeit der Flächen zweiter Klasse vom Rang 1 (Doppelpunkte des Raumes) ergibt (es handelt sich hier um die der Veroneseschen Abbildung der Kurven zweiter Klasse einer Ebene entsprechende Abbildung). Geben wir nun sieben Punktepaare aus sieben Punkten „allgemeiner Lage“ [2]) des ersten Raumes und den ihnen vermöge einer regulären Kollineation zugeordneten Punkten des zweiten Raumes vor, so werden diese auf

---

[1]) Eine vollständige Untersuchung aller möglichen Figuren von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren erfordert ausführliche rechnerische Untersuchungen, wie sie A. Werres für die ebene Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren durchgeführt hat.

[2]) In bezug auf die Figur von acht assoziierten Punkten des Raumes vgl. C. F. Geiser, Über zwei geometrische Probleme, Crelles J. 67, 1867, S. 83 ff. Insbesondere ergibt sich aus dieser Arbeit, welchen Voraussetzungen sieben vorgegebene Punkte genügen müssen, damit der achte assoziierte Punkt eindeutig bestimmt ist (a. a. O. S. 88). Damit erhält der oben gebrauchte Ausdruck „allgemeiner Lage“ einen genauen Sinn.

sieben Punkte einer solchen M_3^8 abgebildet, und der von diesem aufgespannte R_6 schneidet die M_3^8 in einem eindeutig bestimmten achten Punkt. Die acht Punkte, die wir so auf der M_3^8 erhalten, werden weiter auf acht Punktepaare aus den Punkten einer Figur von acht assoziierten Punkten des ersten Raumes und den ihnen vermöge der Kollineation zugeordneten Punkten des zweiten Raumes abgebildet (die wieder eine Figur von acht assoziierten Punkten bilden)[1]). Diese acht Punktepaare bilden eine Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren. Setzen wir schließlich noch, indem wir die beiden Räume zusammenfallen lassen, voraus, daß die sieben vorgegebenen Punktepaare aus Punkten bestehen, die einander vermöge der identischen Kollineation zugeordnet sind, so ergibt sich:

Acht assoziierte Punkte — oder, was dasselbe ist, die Punkte eines Hesseschen Achtecks — bilden doppelt gezählt eine Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren[2]).

16. Abbildung der räumlichen Hermiteschen Ebenenkomplexe auf die Punkte des R_{15}.

Jetzt bilden wir nach einem zu dem im § 1, Abschnitt 3 beschriebenen analogen Verfahren die räumlichen Hermiteschen Komplexe ab.

Die zu den Formen

$$(8) \qquad (pu)\,(\overline{pu}), \quad (p_i\bar{p}_k = p_{ik},\ p_{ik} = \bar{p}_{ki};\ i,k = 0,1,2,3)$$

gehörenden Hermiteschen Ebenenkomplexe bilden wir auf die reellen Punkte eines R_{15} ab. Dann müssen wir die zu den Formen

$$(9) \qquad (ax)\,(\overline{ax}), \quad (a_i\bar{a}_k = a_{ik},\ a_{ik} = \bar{a}_{ki};\ i,k = 0,1,2,3)$$

gehörenden Hermiteschen Punktkomplexe auf die reellen R_{14} des R_{15} abbilden. *Der konjugierten Lage eines Hermiteschen Ebenenkomplexes und eines Punktkomplexes entspricht dann die vereinigte Lage ihres Bildpunktes X und Bild-R_{14} U.*

Ein regulärer Hermitescher Ebenen-(Punkt-)Komplex hat entweder keine reale Ebene (keinen realen Punkt), oder er hat eine (einen) und dann gleich ∞^5 reale Ebenen (Punkte).

Die zu den Formen (8) vom Rang 3 gehörenden Ebenenkomplexe sind durch ein reguläres Hermitesches Polarsystem in einer „Hauptebene" bestimmt: Ein solches Polarsystem liefert entweder einen

---

[1]) Siehe Fußnote 2 auf S. 34.
[2]) J. Rosanes I S. 262.

Geradenkomplex ohne reale Geraden oder einen solchen mit ∞^3 realen Geraden. Der Ebenenkomplex besteht aus der Hauptebene und — im Falle, daß es sich um einen Geradenkomplex mit realen Geraden handelt — allen Ebenen, welche durch die Geraden des Geradenkomplexes laufen. *Die Ebenenkomplexe vom Rang 3 oder, was dasselbe ist, die in den Ebenen des Raumes gelegenen Hermiteschen Polarsysteme werden auf die reellen Punkte einer $M_{14}^{\ 4}$ abgebildet.*

Die zu den Formen (8) vom Rang 2 gehörenden Ebenenkomplexe sind durch eine reguläre antiinvolutorische Beziehung zwischen den Punkten einer „Hauptgeraden" bestimmt: Ein solcher Ebenenkomplex besteht aus den Ebenen durch die Hauptgerade und — im Falle, daß die Antiinvolution eine Ruhekette besitzt — aus den Ebenen, welche durch die Punkte dieser Ruhekette laufen. *Die Ebenenkomplexe vom Rang 2 oder, was dasselbe ist, die antiinvolutorischen Beziehungen auf den Geraden des Raumes werden auf die reellen Punkte der ganz auf der $M_{14}^{\ 4}$ gelegenen $M_{11}^{\ 20}$ abgebildet.*

Die zu den Formen (8) vom Rang 1 gehörenden Ebenenkomplexe sind durch einen Punkt des komplexen Raumes bestimmt: Ein solcher Ebenenkomplex besteht aus allen Ebenen, die durch einen Punkt des komplexen Raumes laufen. *Die Ebenenkomplexe vom Rang 1 oder, was dasselbe ist, die Punkte des komplexen Raumes werden auf die reellen Punkte der ganz auf $M_{11}^{\ 20}$ gelegenen $M_6^{\ 20}$ abgebildet.*

Jeder reelle Punkt einer Ebene, die drei Punkte der $M_6^{\ 20}$ — Bilder der Punkte 1, 2, 3 des Raumes, $(1\,2\,3\,x) \equiv 0\ \{x\}$ — verbindet, wird auf ein Hermitesches Polarsystem in der Ebene $\langle 1\,2\,3\rangle$ abgebildet, in bezug auf welches das Dreieck 1 2 3 Poldreieck ist.

Jeder reelle Punkt einer nicht ganz auf der $M_6^{\ 20}$ gelegenen Sehne der $M_6^{\ 20}$, deren Endpunkte Bilder der Punkte 1, 2 des Raumes sind, wird auf eine antiinvolutorische Beziehung zwischen den Punkten der Geraden 12 abgebildet, in der sich die Punkte 1, 2 entsprechen.

17. Das Bild von acht im Grade 1 abhängigen Punkten im R_{15}.

Ein Punkt, welcher dem durch eine Gleichung $(a\,x)\,(a\,\bar{x}) = 0$ gegebenen Hermiteschen Punktkomplex angehört, wird auf einen reellen Punkt der $M_6^{\ 20}$ abgebildet, der in dem reellen Bild-R_{14} dieses Komplexes liegt. r im Grade s abhängige Punkte werden auf r reelle Punkte der $M_6^{\ 20}$ abgebildet, die (in bezug auf reelle Räume R_{14}) abhängig im Grade s sind. Daraus folgt:

Acht im Grade 1 abhängige Punkte werden auf acht reelle Punkte der $M_6^{\ 20}$ abgebildet, die in einem und nur einem R_8 liegen.

Im allgemeinen schneidet der von sieben reellen Punkten der M_6^{20} aufgespannte R_6 die M_6^{20} in keinem weiteren Punkt; d. h.: Im allgemeinen liefern sieben vorgegebene Punkte des komplexen Raumes keinen achten im Grade 1 abhängigen Punkt.

Sechs vorgegebene Punkte sollen folgenden Voraussetzungen genügen:

1. Keine vier Punkte sollen in einer Ebene liegen.

2. Die sechs Punkte sollen nicht durch eine quaternäre Kette verbunden werden können.

Dann kann man sie nach Satz XII auf ∞^3 Weisen zu einer Figur von sieben Punkten ergänzen, die jedesmal einen achten eindeutig bestimmten im Grade 1 abhängigen Punkt liefert.

§ 5. Die Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren und die Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punkten.

Wir haben in § 4 die Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) mit der Figur von acht Punkten eines R_6 in Verbindung gesetzt, von denen je sieben diesen R_6 ganz aufspannen. In diesem Paragraphen wollen wir aus Eigenschaften dieser Figur des R_6 Eigenschaften der Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) herleiten. Wir gehen dabei von den einfachsten Eigenschaften der Figur des R_6 aus, nämlich folgenden:

1. Der von den Punkten [1], [2], ..., [5] aufgespannte R_4 schneidet die von den Punkten [6], [7], [8] aufgespannte Ebene in einem eindeutig bestimmten Punkt [6 7 8].

2. Der von den Punkten [1], [2], ..., [6] aufgespannte R_5 schneidet die Verbindungslinie der Punkte [7], [8] in einem eindeutig bestimmten Punkt [7 8].

3. Der von je vier Punkten aufgespannte R_3 schneidet den von den vier übrigen Punkten aufgespannten R_3 jedesmal in einem eindeutig bestimmten Punkt.

Man könnte — analog wie beim Hexastigma — weitere Eigenschaften der Figur des R_6 ableiten, die es rechtfertigen würden — wie wir das im folgenden der Kürze halber tun — für sie den besonderen Namen Oktostigma einzuführen. Diesen Eigenschaften entsprächen dann weitere Eigenschaften der Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten). Diese erweisen sich aber als zu kompliziert und sind daher uninteressant. Wir befassen uns mit ihnen nur kurz in einem Nachtrag zu Abschnitt 20.

18. Zur Beziehung zwischen der Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) und dem Oktostigma.

Die Beziehung zwischen der räumlichen Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) und ihrer Bildfigur im R_6 stellen wir her, indem wir annehmen, daß die Fundamentalpunkte [1], [2] ..., [8] des Oktostigmas

auf der Bildmannigfaltigkeit M_6^{20} der aus den Punkten zweier Räume gebildeten Punktepaare

so gelegen sind, daß sie auf

acht im Grade 1 abhängige Punktepaare (p^1, q^1), (p^2, q^2), ..., (p^8, q^8) abgebildet werden, von denen je sechs den Voraussetzungen 1 und 2 auf S. 34 genügen.

auf der Bildmannigfaltigkeit M_6^{20} der Punkte eines komplexen Raumes

acht im Grade 1 abhängige Punkte 1, 2, ..., 8 abgebildet werden, von denen je sechs den Voraussetzungen 1 und 2 auf S. 37 genügen.

Die Existenz solcher Punktoktupel auf der M_6^{20} folgt analog zu Satz 1 aus dem

Satz 14: Sechs Punktepaare, die den Voraussetzungen 1 und 2 auf S. 34 genügen, kann man nach Satz 12 so zu einer Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren ergänzen, daß alle in ihr enthaltenen Sextupel von Punktepaaren den Voraussetzungen genügen.

Satz XIV: Sechs Punkte, die den Voraussetzungen 1 und 2 auf S. 37 genügen, kann man nach Satz XII so zu einer Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punkten ergänzen, daß alle in ihr enthaltenen Sextupel von Punkten den Voraussetzungen genügen.

19. Erste Konstruktion der Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten).

Führen wir die Abbildung des in Abschnitt 18 beschriebenen Oktostigmas durch, so ergibt sich:

Der Punkt [678] des Oktostigmas

wird auf eine Korrelation vom Rang 3 abgebildet, welche in der von den Punktepaaren

(p^1, q^1), (p^2, q^2), ..., (p^5, q^5)

aufgespannten Mannigfaltigkeit von ∞^4 Korrelationen enthalten ist.

wird auf einen Hermiteschen Ebenenkomplex vom Rang 3 abgebildet, welcher in der von den Punkten 1, 2, ..., 5 aufgespannten Mannigfaltigkeit von ∞^4 Ebenenkomplexen enthalten ist.

Nun gilt der

Satz 15: Die Hauptebenen der Korrelationen vom Rang 3, welche in der von fünf Punktepaaren aufgespannten Mannigfaltigkeit von ∞^4 Korrelationen enthalten sind, entsprechen sich in der durch diese fünf Punktepaare bestimmten Kollineation.

Satz XV: Die Hauptebenen der Hermiteschen Ebenenkomplexe vom Rang 3, welche in der von fünf Punkten aufgespannten Mannigfaltigkeit von ∞^4 Hermiteschen Ebenenkomplexe enthalten sind, durchdringen die durch diese fünf Punkte bestimmte quaternäre Kette in einer ternären Kette.

Die Beweise dieser beiden Sätze verlaufen analog wie die der Sätze 4 und IV. Aus ihnen folgt der

Satz 16: In der Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren $(p^1, q^1), (p^2, q^2), \ldots, (p^8, q^8)$ entsprechen sich z. B. die Ebenen $\langle p^6 p^7 p^8\rangle$ und $\langle q^6 q^7 q^8\rangle$ in der durch die Punktepaare (p^1, q^1), (p^2, q^2), . . ., (p^5, q^5) bestimmten Kollineation.

Satz XVI: In der Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punkten $1, 2, \ldots, 8$ durchdringt z. B. die Ebene $\langle 6\,7\,8\rangle$ die quaternäre Kette durch die Punkte $1, 2, \ldots, 5$ in einer ternären Kette.

Weiter gilt:

Die zu der Korrelation [6 7 8] gehörende korrelative Verwandtschaft zwischen den Ebenen $\langle p^6 p^7 p^8\rangle$ und $\langle q^6 q^7 q^8\rangle$ ist dadurch bestimmt, daß die Dreiecke $p^6 p^7 p^8$ und $q^6 q^7 q^8$ in bezug auf sie konjugiert sind und daß der Schnittgeraden der Ebenen $\langle p^i p^j p^k\rangle$ und $\langle p^6 p^7 p^8\rangle$ der Schnittpunkt der Geraden $q^l q^m$ mit der Ebene $\langle q^6 q^7 q^8\rangle$ zugeordnet wird ($i \neq j \neq \cdots \neq m$; $i, j, \ldots, m = 1, 2, \ldots, 5$).

Das zu dem Ebenenkomplex [6 7 8] gehörende Hermitesche Polarsystem in der Ebene $\langle 6\,7\,8\rangle$ ist dadurch bestimmt, daß das Dreieck 6 7 8 ein Poldreieck desselben ist und daß der Schnittgeraden der Ebenen $\langle ijk\rangle$ und $\langle 6\,7\,8\rangle$ der Schnittpunkt der Geraden lm mit der Ebene 6 7 8 zugeordnet wird ($i \neq j \neq \cdots \neq m$; $i, j, \ldots, m = 1, 2, \ldots, 5$).

Zum Beweise des letzten Teils z. B der linksstehenden Behauptung gehen wir von der Gleichung der Korrelation [6 7 8] aus. Sie ist von der Form

$$\lambda_1 (p^1 u) \cdot (q^1 v) + \lambda_2 (p^2 u) \cdot (q^2 v) + \cdots + \lambda_5 (p^5 u) \cdot (q^5 v) = 0\,;$$

wo die λ_i komplexe Koeffizienten bedeuten. Setzen wir darin z. B. $u = p^1 p^2 p^3$, so sehen wir, daß die Korrelation [6 7 8] der Ebene $\langle p^1 p^2 p^3\rangle$ einen Punkt der Verbindungsgeraden $q^4 q^5$ zuordnet, also

— da sie jeder Ebene des ersten Raumes einen Punkt in der Ebene $\langle q^6 q^7 q^8 \rangle$ zuordnet — den Schnittpunkt der Geraden $q^4 q^5$ mit der Ebene $\langle q^6 q^7 q^8 \rangle$. W.z.b.w.

Wir können also sagen:

Satz 17: In der Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (p^1, q^1), (p^2, q^2), ..., (p^8, q^8) *ist durch die Zuordnung*

$$(\langle p^i p^j p^k \rangle, \langle p^6 p^7 p^8 \rangle) \rightarrow \rightarrow (\quad q^l q^m \quad , \langle q^6 q^7 q^8 \rangle)$$

$$(i \neq j \neq \cdots \neq m; \quad i, j, \ldots, m = 1, 2, \ldots, 5)$$

eine korrelative Verwandtschaft zwischen den Ebenen $\langle p^6 p^7 p^8 \rangle$ *und* $\langle q^6 q^7 q^8 \rangle$ *bestimmt; die Dreiecke* $p^6 p^7 p^8$ *und* $q^6 q^7 q^8$ *sind in bezug auf diese Korrelation konjugiert.*

Satz XVII: In der Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punkten $1, 2, \ldots, 8$ *ist durch die Zuordnung*

$$(\langle ijk \rangle, \langle 6\,7\,8 \rangle) \rightarrow (lm, \langle 6\,7\,8 \rangle)$$

$$(i \neq j \neq \cdots \neq m; \quad i, j, \ldots, m = 1, 2, \ldots, 5)$$

ein Hermitesches Polarsystem in der Ebene $\langle 6\,7\,8 \rangle$ *bestimmt; das Dreieck* $6\,7\,8$ *ist ein Poldreieck dieses Polarsystems.*

Speziell gilt

Satz 17 a: In der Figur von acht assoziierten Punkten $1, 2, \ldots, 8$ *ist durch die Zuordnung*

$$(\langle ijk \rangle, \langle 6\,7\,8 \rangle) \rightarrow (lm, \langle 6\,7\,8 \rangle)$$

$$(i \neq j \neq \cdots \neq m; \quad i, j, \ldots, m = 1, 2, \ldots, 5)$$

eine Polarität in der Ebene $\langle 6\,7\,8 \rangle$ *bestimmt; das Dreieck* $6\,7\,8$ *ist ein Polardreieck dieser Polarität.*

Aus Satz 17 (XVII) ergibt sich schließlich folgende

Erste Konstruktion

von Punktepaaren (p^7, q^7), (p^8, q^8), welche sechs vorgegebene Punktepaare (p^1, q^1), (p^2, q^2), ..., (p^6, q^6) zu einer Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren ergänzen:

Satz 18: Man konstruiere ein Ebenenpaar a, b, so daß a durch p^6 *und b durch* q^6 *läuft und beide Ebenen sich in der durch die Punktepaare* (p^1, q^1), (p^2, q^2), ..., (p^5, q^5) *bestimmten Kollineation entsprechen.*

von Punkten 7, 8, welche sechs vorgegebene Punkte $1, 2, \ldots, 6$ zu einer Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punkten ergänzen:

Satz XVIII: Man konstruiere eine Ebene a, welche durch 6 läuft und die quaternäre Kette durch die Punkte $1, 2, \ldots, 5$ *in einer ternären Kette durchdringt.*

Dann konstruiere man die durch die Zuordnung

$$(\langle p^i p^j p^k\rangle, a) \to$$
$$(*) \quad \to \quad (\quad q^l q^m, b)$$
$$(i \neq j \neq \cdots \neq m;$$
$$i, j, \ldots, m = 1, 2, \ldots, 5)$$

eindeutig bestimmte korrelative Verwandtschaft zwischen den Ebenen a und b. Auf der dem Punkte q^6 (p^6) vermöge dieser Korrelation zugeordneten Geraden $P_{[7\,8]}$ ($Q_{[7\,8]}$) wähle man p^7 (q^7) beliebig. p^8 (q^8) liegt dann auf dem Schnittpunkt von $P_{[7\,8]}$ ($Q_{[7\,8]}$) mit der dem Punkte q^7 (p^7) zugeordneten Geraden[1]*).*

Dann konstruiere man das durch die Zuordnung

$$(\langle ijk\rangle, a) \to (lm, a)$$
$$(+)$$
$$(i \neq j \neq \cdots \neq m;$$
$$i, j, \ldots, m = 1, 2, \ldots, 5)$$

eindeutig bestimmte Hermitesche Polarsystem in der Ebene a. Auf der dem Punkte 6 vermöge dieses Polarsystems zugeordneten Geraden [7 8] wähle man 7 beliebig. 8 liegt dann auf dem Schnittpunkt von [7 8] mit der dem Punkte 7 zugeordneten Geraden.

20. Zweite Konstruktion der Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten).

Für die Konstruktion der Geradenpaare $P_{[7\,8]}$, $Q_{[7\,8]}$ des Satzes 18 (der Geraden [7 8] des Satzes XVIII) können wir auf Grund von Satz 16 (XVI) noch eine übersichtlichere Vorschrift angeben. Zu diesem Zweck beweisen wir zunächst einen Hilfssatz. Indem wir Satz 6 (VI) verallgemeinern, ergibt sich

Satz 19: Von sechs vorgegebenen Punktepaaren (p^1, q^1), $(p^2, q^2), \ldots,$ (p^6, q^6) unterwerfe man jeden der sechs Punkte

$$p^1, p^2, \ldots, p^6 \,(q^1, q^2, \ldots, q^6)$$

der Kollineation, welche durch die fünf übrigen Punktepaare bestimmt ist. So erhält man sechs Punkte

Satz XIX: Von sechs vorgegebenen Punkten 1, 2, . . . , 6 spiegele man jeden an der durch die fünf übrigen Punkte bestimmten quaternären Kette, d. h. man unterwerfe ihn der mit der Kette verbundenen involutorischen Antikollineation. So erhält man sechs weitere Punkte 1′, 2′, . . . , 6′. Dann

---

[1]) Auf Grund dieser Konstruktion kann man leicht abzählen, daß man die sechs vorgegebenen Punktepaare (Punkte) auf ∞^3 verschiedene Weisen zu einer Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) ergänzen kann. In Spezialfällen wird die durch die Zuordnung (*) bestimmte Korrelation (das durch die Zuordnung (+) bestimmte Hermitesche Polarsystem) unbestimmt. Wir gehen hier nicht auf solche Spezialfälle ein. Vgl. aber Satz 22 (XXII).

$p^{1'}, p^{2'}, \ldots, p^{6'}$ $(q^{1'}, q^{2'}, \ldots, q^{6'})$. *Dann gehören die Geraden* $p^1 p^{1'}, p^2 p^{2'}, \ldots, p^6 p^{6'}$ $(q^1 q^{1'}, q^2 q^{2'}, \ldots, q^6 q^{6'})$ *einem Regulus* $R_{[p]}$ $(R_{[q]})$ *an.*

gehören die Geraden $1\,1', 2\,2', \ldots, 6\,6'$ *einem Regulus* R *an*[1]).

Wir beschränken uns hier darauf, Satz 19 zu beweisen.

Vorher stellen wir folgende Hilfsbetrachtung an: Die Gerade $p^6 p^{6'}$ $(q^6 q^{6'})$ z. B. kann man mittels einer ebenen Konstruktion finden. Projiziert man nämlich die Punkte $p^2, p^3, \ldots, p^6$ $(q^2, q^3, \ldots, q^6)$ vom Punkte p^1 (q^1) auf die Ebene $\langle p^2 p^3 p^4 \rangle$ $(\langle q^2 q^3 q^4 \rangle)$, so erhält man die Punkte $p^2, p^3, p^4, p_1{}^5, p_1{}^6$ $(q^2, \ldots, q_1{}^6)$. Die Kollineation, welche die Punkte $p^2, p^3, p^4, p_1{}^5$ der Reihe nach in $q^2, q^3, q^4, q_1{}^5$ überführt, ordnet dem Punkt $p_1{}^6$ einen Punkt $q_1{}^{6'}$ zu (und die zu dieser Kollineation inverse ordnet dem Punkt $q_1{}^6$ einen Punkt $p_1{}^{6'}$ zu); die Gerade $p^6 p_1{}^{6'}$ $(q^6 q_1{}^{6'})$ ist die gesuchte Gerade $p^6 p^{6'}$ $(q^6 q^{6'})$.

Der Beweis unseres Satzes ergibt sich nun wie folgt: Man projiziere die Figur des ersten (zweiten) Raumes vom Punkte p^1 (q^1) auf die Ebene $\langle p^2 p^3 p^4 \rangle$ $(\langle q^2 q^3 q^4 \rangle)$. So erhält man die Punkte $p^2, p^3, p^4, p_1{}^5, p_1{}^6$ und $p_1{}^{2'}, p_1{}^{3'}, p_1{}^{4'}, p_1{}^{5'}, p_1{}^{6'}$ $(q^2, \ldots, q_1{}^6$ und $q_1{}^{2'}, \ldots, q_1{}^{6'})$. Nach der obigen Hilfsbetrachtung und Satz 6 laufen dann die Geraden $p^2 p_1{}^{2'}, p^3 p_1{}^{3'}, \ldots, p^6 p_1{}^{6'}$ $(q^2 q_1{}^{2'}, \ldots, q^6 q_1{}^{6'})$ durch einen Punkt und mithin die Ebenen $\langle p^1 p^2 p^{2'} \rangle, \langle p^1 p^3 p^{3'} \rangle, \ldots, \langle p^1 p^6 p^{6'} \rangle$ $(\langle q^1 q^2 q^{2'} \rangle, \ldots, \langle q^1 q^6 q^{6'} \rangle)$ durch eine Gerade I_p (I_q); diese ist eine gemeinsame Treffgerade der Geraden $p^1 p^{1'}, p^2 p^{2'}, \ldots, p^6 p^{6'}$ $(q^1 q^{1'}, \ldots, q^6 q^{6'})$. Führt man die gleichen Überlegungen durch, indem man nacheinander die Punkte p^2 (q^2) bzw. p^3 (q^3) mit den Ebenen $\langle p^3 p^4 p^1 \rangle$ $(\langle q^3 q^4 q^1 \rangle)$ bzw. $(\langle p^4 p^1 p^2 \rangle)$ $(\langle q^4 q^1 q^2 \rangle)$ als Projektionszentrum bzw. -ebene auszeichnet, so ergibt sich:

Die Schnittgeraden der Ebenen

$$I_p\colon \langle p^1 p^2 p^{2'} \rangle, \langle p^1 p^3 p^{3'} \rangle, \ldots, \langle p^1 p^6 p^{6'} \rangle$$
$$II_p\colon \langle p^2 p^1 p^{1'} \rangle, \langle p^2 p^3 p^{3'} \rangle, \ldots, \langle p^2 p^6 p^{6'} \rangle$$
$$III_p\colon \langle p^3 p^1 p^{1'} \rangle, \langle p^3 p^2 p^{2'} \rangle, \ldots, \langle p^3 p^6 p^{6'} \rangle$$

sind gemeinsame Treffgeraden der Geraden $p^1 p^{1'}, p^2 p^{2'}, \ldots, p^6 p^{6'}$; die Schnittgeraden der Ebenen

$$I_q\colon \langle q^1 q^2 q^{2'} \rangle, \langle q^1 q^3 q^{3'} \rangle, \ldots, \langle q^1 q^6 q^{6'} \rangle$$
$$II_q\colon \langle q^2 q^1 q^{1'} \rangle, \langle q^2 q^3 q^{3'} \rangle, \ldots, \langle q^2 q^6 q^{6'} \rangle$$
$$III_q\colon \langle q^3 q^1 q^{1'} \rangle, \langle q^3 q^2 q^{2'} \rangle, \ldots, \langle q^3 q^6 q^{6'} \rangle$$

sind gemeinsame Treffgeraden der Geraden $q^1 q^{1'}, q^2 q^{2'}, \ldots, q^6 q^{6'}$.

---

[1]) H. Peters, Verallgemeinerung eines Study schen Satzes aus der komplexen Geometrie; Jahresbericht der D.M.V. **45**, 1935, S. 62.

Die Geraden I_p, II_p, III_p (I_q, II_q, III_q) sind paarweise windschief — sonst lägen entgegen der in Abschnitt 18 gemachten Voraussetzung z. B. die Punkte p^1, p^2, p^3, p^4 in einer Ebene —; sie bestimmen also einen Regulus. Mithin gehören auch die Geraden $p^1 p^{1'}, p^2 p^{2'}, \ldots,$ $p^6 p^{6'}$ ($q^1 q^{1'}, \ldots, q^6 q^{6'}$) einem Regulus $R_{[p]}$ ($R_{[q]}$) an. W. z. b. w.

Jetzt sind wir in der Lage, die in Aussicht gestellte Vorschrift zur Konstruktion der Geradenpaare $P_{[78]}, Q_{[78]}$ des Satzes 18 (der Geraden [7 8] des Satzes XVIII) anzugeben: Es gilt nämlich der

Satz 20: Zwischen den Geraden der Reguli $\overline{R}_{[p]}$ und $\overline{R}_{[q]}$, die zu den Reguli $R_{[p]}$ und $R_{[q]}$ des Satzes 19 konjugiert sind, besteht eine projektive Beziehung. Vermöge dieser werden den durch die Punkte $p^1, p^2, \ldots, p^6$ laufenden Geraden des Regulus $\overline{R}_{[p]}$ die durch die Punkte $q^1, q^2, \ldots, q^6$ laufenden Geraden des Regulus $\overline{R}_{[q]}$ zugeordnet. Die Geradenpaare $P_{[78]}, Q_{[78]}$ des Satzes 18 bestehen aus Geraden der Reguli $\overline{R}_{[p]}, \overline{R}_{[q]}$, welche sich in dieser projektiven Beziehung entsprechen.

Satz XX: Die durch die Punkte $1, 2, \ldots, 6$ laufenden Geraden des Regulus $\overline{R}$, der zu dem Regulus R des Satzes XIX konjugiert ist, gehören einer binären Geradenkette jenes Regulus an. Alle Geraden [7 8] des Satzes XVIII sind in dieser binären Geradenkette enthalten.

In der Tat, aus der Konstruktion des Satzes 19 folgt: Die Verbindungsebenen

$$\langle p^6 p^{6'} p^1 \rangle, \langle q^6 q^{6'} q^1 \rangle$$
$$\langle p^6 p^{6'} p^2 \rangle, \langle q^6 q^{6'} q^2 \rangle$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\langle p^6 p^{6'} p^5 \rangle, \langle q^6 q^{6'} q^5 \rangle$$

oder, was dasselbe ist, die Ebenen, welche die Erzeugende $p^6 p^{6'}$ des Regulus $R_{[p]}$ mit den durch die Punkte $p^1, p^2, \ldots, p^5$ laufenden Erzeugenden des Regulus $\overline{R}_{[p]}$ verbinden, und die Ebenen, welche die Erzeugende $q^6 q^{6'}$ des Regulus $R_{[q]}$ mit den Erzeugenden des Regulus $\overline{R}_{[q]}$ durch die Punkte $q^1, q^2, \ldots, q^5$ verbinden, entsprechen sich in der durch die Punktepaare $(p^1, q^1), (p^2, q^2), \ldots, (p^5, q^5)$ bestimmten Kollineation. Verbindet man also allgemein den Punkt p^6 mit einer Geraden des Regulus $\overline{R}_{[p]}$ und den Punkt q^6 mit der dieser Geraden auf dem Regulus $\overline{R}_{[q]}$ zugeordneten Geraden, so entsprechen sich die beiden Verbindungsebenen in der durch die Punktepaare (p^1, q^1), $(p^2, q^2), \ldots, (p^5, q^5)$ bestimmten Kollineation.

Indem man diesen Schluß mehrfach wiederholt, ergibt sich: Verbindet man zwei einander nach Satz 20 zugeordnete Geraden $P_{[7\,8]}$, $Q_{[7\,8]}$ der Reguli $\overline{R}_{[p]}, \overline{R}_{[q]}$ mit den Punkten eines der sechs Punktepaare $(p^1, q^1), (p^2, q^2), \ldots, (p^6, q^6)$, so entsprechen sich die Verbindungsebenen in der durch die übrigen fünf Punktepaare bestimmten Kollineation. Diese Forderung müssen aber nach Satz 16 die Geradenpaare $P_{[7\,8]}, Q_{[7\,8]}$ des Satzes 18 erfüllen. — Der Beweis des Satzes XX verläuft analog.

Auf Grund von Satz 20 (XX) können wir jetzt unmittelbar Geradenpaare $P_{[7\,8]}$; $Q_{[7\,8]}$ (Geraden [7 8]) angeben, auf denen die Punkte p^7, p^8; q^7, q^8 (7, 8) liegen, welche sechs vorgegebene Punktepaare (p^1, q^1), $(p^2, q^2), \ldots, (p^6, q^6)$ (Punkte $1, 2, \ldots, 6$) zu einer Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten) ergänzen. Wir können aber auch weiter — unabhängig von Satz 18 (XVIII) — die Punkte p^7, p^8; q^7, q^8 (7, 8) angeben. Auf die Konstruktion dieser Punkte werden wir geführt, wenn wir den Punkt [7 8] des Oktostigmas abbilden.

Der Punkt [7 8] des Oktostigmas

wird auf eine Korrelation vom Rang 2 abgebildet, welche in der von den Punktepaaren (p^1, q^1), $(p^2, q^2), \ldots, (p^6, q^6)$ aufgespannten Mannigfaltigkeit von ∞^5 Korrelationen enthalten ist. Diese Korrelation ist durch eine projektive Beziehung zwischen den Punkten der Geraden $p^7 p^8$ und $q^7 q^8$ bestimmt, in der sich die Punkte p^7, q^8 und p^8, q^7 entsprechen und die außerdem dem Schnittpunkt der Ebene $\langle p^i p^j p^k \rangle$ mit der Geraden $p^7 p^8$ den Schnittpunkt der Ebene $\langle q^l q^m q^n \rangle$ mit der Geraden $q^7 q^8$ zuordnet $(i \neq j \neq \ldots \neq n;$ $i, j, \ldots, n = 1, 2, \ldots, 6)$.

wird auf einen Hermiteschen Ebenenkomplex vom Rang 2 abgebildet, welcher in der von den Punkten $1, 2, \ldots, 6$ aufgespannten Mannigfaltigkeit von ∞^5 Ebenenkomplexen enthalten ist. Dieser Ebenenkomplex ist durch eine antiinvolutorische Beziehung zwischen den Punkten der Geraden 7 8 bestimmt, in der sich die Punkte 7, 8 entsprechen und die außerdem dem Schnittpunkt der Ebene $\langle ijk \rangle$ mit der Geraden 7 8 den Schnittpunkt der Ebene $\langle lmn \rangle$ mit der Geraden 78 zuordnet $(i \neq j \neq \ldots \neq n;$ $i, j, \ldots, n = 1, 2, \ldots, 6$.

Zum Beweise des letzten Teils z. B. der linksstehenden Behauptung gehen wir von der Gleichung der Korrelation [78] aus. Sie ist von der Form

$$\lambda_1 (p^1 u) \cdot (q^1 v) + \lambda_2 (p^2 u) \cdot (q^2 v) + \cdots + \lambda_6 (p^6 u) \cdot (q^6 v) = 0\,,$$

wo die λ_i komplexe Koeffizienten bedeuten. Setzen wir darin z. B.

$u = \langle p^1 p^2 p^3 \rangle$, so sehen wir, daß die Korrelation [7 8] der Ebene $\langle p^1 p^2 p^3 \rangle$ einen Punkt in der Ebene $\langle q^4 q^5 q^6 \rangle$ zuordnet, also — da sie jeder Ebene des ersten Raumes einen Punkt auf der Geraden $q^7 q^8$ zuordnet — den Schnittpunkt der Ebene $\langle q^4 q^5 q^6 \rangle$ mit der Geraden $q^7 q^8$. W. z. b. w.

Wir können also sagen

Satz 21: In der Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren $(p^1, q^1), (p^2, q^2), \ldots, (p^8, q^8)$ *ist z. B. durch die Zuordnung*

$$(\langle p^i p^j p^k \rangle, p^7 p^8) \rightarrow (\langle q^l q^m q^n \rangle, q^7 q^8)$$

$$(i \neq j \neq \ldots \neq n; \quad i, j, \ldots, n = 1, 2, \ldots, 6)$$

eine projektive Beziehung zwischen den Punkten der Geraden $p^7 p^8$ *und* $q^7 q^8$ *bestimmt. Vermöge dieser projektiven Beziehung wird* p^7 *der Punkt* q^8 *und* p^8 *der Punkt* q^7 *zugeordnet.*

Satz XXI: In der Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punkten $1, 2, \ldots, 8$ *ist z. B. durch die Zuordnung*

$$(\langle i j k \rangle, 7\,8) \rightarrow (\langle l m n \rangle, 7\,8)$$

$$(i \neq j \neq \ldots \neq n; \quad i, j, \ldots, n = 1, 2, \ldots, 6)$$

eine antiinvolutorische Beziehung zwischen den Punkten der Geraden 7 8 bestimmt. In dieser Antiinvolution entsprechen sich die Punkte 7, 8.

Speziell gilt

Satz 21a: In der Figur von acht assoziierten Punkten $1, 2, \ldots, 8$ *ist durch die Zuordnung*

$$(\langle i j k \rangle, 7\,8) \rightarrow (\langle l m n \rangle, 7\,8)$$

$$(i \neq j \neq \ldots \neq n; \quad i, j, \ldots, n = 1, 2, \ldots, 6)$$

eine involutorische Beziehung zwischen den Punkten der Geraden 7 8 bestimmt. Diese Involution wird auf der Geraden 7 8 von den durch die Punkte $1, 2, \ldots, 6$ *laufenden Flächen zweiter Ordnung ausgeschnitten; in ihr entsprechen sich die Punkte 7, 8.*

Aus Satz 21 (XXI) ergibt sich nun folgende

Zweite Konstruktion

von Punktepaaren $(p^7, q^7), (p^8, q^8)$, welche sechs vorgegebene Punktepaare $(p^1, q^1), (p^2, q^2), \ldots, (p^6, q^6)$ zu einer Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren ergänzen.

von Punkten 7, 8, welche sechs vorgegebene Punkte $1, 2, \ldots, 6$ zu einer Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punkten ergänzen.

Satz 22: Mit Hilfe der sechs vorgegebenen Punktepaare konstruiere man nach Satz 19 zwei Reguli $R_{[p]}$, $R_{[q]}$ und die dazu konjugierten Reguli $\overline{R}_{[p]}$, $\overline{R}_{[q]}$. Auf dem Regulus $\overline{R}_{[p]}$ wähle man eine Gerade $P_{[7\,8]}$, die durch keinen der sechs vorgegebenen Punkte läuft[1]*, beliebig. Ihr entspricht vermöge der in Satz 20 beschriebenen projektiven Beziehung zwischen den Geraden der Reguli $\overline{R}_{[p]}$, $\overline{R}_{[q]}$ auf dem Regulus $\overline{R}_{[q]}$ eine Gerade $Q_{[7\,8]}$. Die Punkte der Geraden $P_{[7\,8]}$, $Q_{[7\,8]}$ beziehe man aufeinander vermöge der durch die Zuordnung*

$$(*)\qquad \begin{matrix}(\langle p^i p^j p^k\rangle,\ P_{[7\,8]}) \longrightarrow \\ (\langle q^l q^m q^n\rangle,\ Q_{[7\,8]})\end{matrix}$$

$$(i \neq j \neq \ldots \neq n;\quad i, j, \ldots, n = 1, 2, \ldots, 6)$$

eindeutig bestimmten Projektivität. Auf $P_{[7\,8]}$ wähle man p^7, auf $Q_{[7\,8]}$ q^7 beliebig, jedoch so, daß die projektive Beziehung zwischen $P_{[7\,8]}$ und $Q_{[7\,8]}$ nicht p^7 den Punkt q^7 zuordnet[2]*. Dann wird vermöge dieser Projektivität p^7 der Punkt q^8 und q^7 der Punkt p^8 zugeordnet.*

Satz XXII: Mit Hilfe der sechs vorgegebenen Punkte konstruiere man nach Satz XIX einen Regulus R und den dazu konjugierten Regulus $\overline{R}$. Auf $\overline{R}$ ist nach Satz XX eine binäre Geradenkette ausgezeichnet. Die Punkte einer Geraden $[7\,8]$, die durch keinen der sechs vorgegebenen Punkte läuft und dieser binären Geradenkette angehört, beziehe man aufeinander, vermöge der durch die Zuordnung

$$(+)\quad (\langle i\,j\,k\rangle, [7\,8]) \to (\langle l\,m\,n\rangle, [7\,8])$$

$$(i \neq j \neq \ldots \neq n;\quad i, j, \ldots, n = 1, 2, \ldots, 6)$$

eindeutig bestimmten Antiinvolution. Auf $[7\,8]$ wähle man 7 beliebig, jedoch so, daß dieser Punkt nicht Ruhepunkt der Antiinvolution auf $[7\,8]$ ist[2]*. Dann wird 7 vermöge dieser Antiinvolution 8 zugeordnet.*

Im Anschluß an die Konstruktion des Oktostigmapunktes [7 8] und dessen Abbildung, die wir auf Seite 44 beschrieben haben, bemerken wir noch:

Dem Satz über die Transversalen des Hexastigmas entspricht beim Oktostigma der Satz:

---

[1]) Andernfalls wird die durch die Zuordnung (*) ((+)) bestimmte Projektivität (Antiinvolution) unbestimmt. Angenommen z. B. $P_{[7\,8]}$ liefe durch p^6 (und damit $Q_{[7\,8]}$ durch q^6); dann würde vermöge der durch die Zuordnung (*) bestimmten projektiven Beziehung jedem Punkt von $P_{[7\,8]}$ ($Q_{[7\,8]}$) der Punkt q^6 (p^6) zugeordnet werden. Wählt man in diesem Fall p^7 (q^7) auf $P_{[7\,8]}$ ($Q_{[7\,8]}$) beliebig, aber von p^6 (q^6) verschieden, so fällt p^8 mit p^6 und q^8 mit q^6 zusammen. Läßt man in unserem Fall z. B. p^7 mit p^6 zusammenfallen, so wird q^8 auf $Q_{[7\,8]}$ unbestimmt.

[2]) Andernfalls fällt das achte Punktepaar (der achte Punkt) mit dem siebenten zusammen.

Je vier indexfremde Verbindungsgeraden, z. B.

(1 2) (3 4) (5 6) (7 8)

bestimmen eine gemeinsame Transversalebene $\langle 1\,2,\ 3\,4,\ 5\,6,\ 7\,8\rangle$, die Schnittebene der von den Punkten [3], [4], ..., [8]; [5], [6], ..., [2]; [7], [8], ..., [4]; [1], [2], ..., [6] aufgespannten R_5, welche danach die Transversalpunkte [1 2], [3 4], [5 6], [7 8] enthält, in dem je eine der Verbindungsgeraden den von den drei übrigen aufgespannten R_5 schneidet.

Die Transversalpunkte des Hexastigmas konnte man — in Verbindung mit den harmonischen Punkten — mehrfach zu gewissen Figuren zusammenfassen; dasselbe gilt von den Transversalpunkten und den analog zu definierenden harmonischen Punkten des Oktostigmas.

Indexfremde Transversalpunkte des Hexastigmas haben wir auf Tripel linear-abhängiger Projektivitäten in der Ebene abgebildet und so einen Zusammenhang zwischen der Theorie von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren und der von Tripeln linear-abhängiger Projektivitäten hergestellt; indexfremde Transversalpunkte des Oktostigmas werden analog — mit Hilfe von Satz 17 — auf Quadrupel linear-abhängiger Projektivitäten des Raumes abgebildet, so daß man also einen Zusammenhang zwischen der Theorie von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren und der von Quadrupeln linear-abhängiger Projektivitäten herstellen kann. Während aber in der Ebene zwei vorgegebene Projektivitäten im allgemeinen eine eindeutig bestimmte linear-abhängige dritte bestimmen, gilt ein analoger Satz über Projektivitätenquadrupel des Raumes nicht, wie man leicht einsieht, wenn man von der in § 4 Abschn. 14 beschriebenen Abbildung der Projektivitäten des Raumes auf die Punkte einer M_{11}^{20} des R_{15} ausgeht: Drei Projektivitäten des Raumes bestimmen im allgemeinen keine linear-abhängige vierte Projektivität. Ein dem Satz 3 über sechs im Grade 1 abhängige Punktepaare entsprechender Satz über acht im Grade 1 abhängige Punktepaare ist aus diesem Grunde uninteressant.

Aus den verschiedenen Figuren, welche die Transversalpunkte und harmonischen Punkte des Hexastigmas bilden, haben wir in § 3 gewisse Konfigurationen hergeleitet, die mit der Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren verbunden sind. Ebenso könnte man aus den verschiedenen Figuren, welche die Transversalpunkte und harmonischen Punkte des Oktostigmas bilden, gewisse Konfigurationen herleiten, die mit der Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren verbunden sind. Darauf gehen wir nicht weiter ein.

21. Nachtrag zu Satz 12 (XII).

Mit Hilfe der in der Einleitung zu diesem Paragraphen bezeichneten dritten Eigenschaft des Oktostigmas schließen wir noch — analog wie bei Satz 7 (VII) —:

Satz 23: Zerlegt man die Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren in irgend zwei Gruppen von je vier Paaren, so liefern diese beiden Gruppen je ein Paar von

Satz XXIII: Zerlegt man die Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punkten in irgend zwei Gruppen von je vier Punkten, so liefern diese je ein Polltetraeder eines eindeutig

Tetraedern, welche in bezug auf eine eindeutig bestimmte reguläre Korrelation konjugiert sind[1]).

bestimmten regulären Hermiteschen Ebenenkomplexes.

Speziell gilt der

Satz 23a: Zerlegt man die Ecken eines Hesseschen Achtecks in irgend zwei Gruppen von je vier Punkten, so liefern diese je ein Polartetraeder einer eindeutig bestimmten Fläche zweiter Klasse.

Auf Grund von Satz 23 (XXIII) können wir Satz 12 (XII), der für $n = 3$ die von J. Rosanes angegebene Konstruktion der Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren liefert, für $n = 3$ wie folgt ergänzen:

Zerlegt man sechs vorgegebene Punktepaare beliebig in zwei Gruppen von vier bzw. zwei Punktepaaren und konstruiert man nach Satz 12 eine der ∞^1 Korrelationen, so erhält man, wenn man das siebente Punktepaar stets auf dieselbe Weise wählt, auch stets ein und dasselbe im Grade 1 abhängige achte Punktepaar.

Zerlegt man sechs vorgegebene Punkte beliebig in zwei Gruppen von vier bzw. zwei Punkten und konstruiert man nach Satz XII eines der ∞^1 Hermiteschen Polarsysteme, so erhält man, wenn man den siebenten Punkt stets auf dieselbe Weise wählt, auch stets ein und denselben im Grade 1 abhängigen achten Punkt.

Zwischen den Konstruktionen der Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten), die wir in den Sätzen 18 und 22 (XVIII und XXII) hergeleitet haben, und derjenigen, die sich in Satz 12 (XII) für $n = 3$ ergibt, besteht ein analoger Zusammenhang wie zwischen den beiden im ersten Teil angegebenen Konstruktionen der Figur von sechs im Grade 1 abhängigen Punktepaaren (Punkten). Die Herleitung der in den Sätzen 18 und 22 (XVIII und XXII) angegebenen Konstruktionen hat uns aber einen tieferen Einblick in die Eigenschaften der beiden räumlichen Figuren vermittelt. Insbesondere ist die in Satz 22 angegebene Konstruktion der Figur von acht im Grade 1 abhängigen Punktepaaren im Vergleich zu der bekannten Rosanesschen vollständiger und übersichtlicher.

[1]) J. Rosanes II S. 318.

Lebenslauf.

Ich, Hans Peters, evangelischen Bekenntnisses, wurde am 23. September 1911 zu Köln-Mülheim als Sohn des Bautechnikers Wilhelm Peters und seiner Ehefrau Klara geb. Fittig geboren. Zunächst besuchte ich die Grund- und Mittelschule zu Leverkusen, später das Reform-Realgymnasium zu Köln-Mülheim, wo ich Ostern 1930 die Reifeprüfung bestand. Dann studierte ich drei Semester in Göttingen, darauf in Bonn Reine Mathematik, Physik, Angewandte Mathematik und Philosophie. Mein Dank gilt allen akademischen Lehrern, insbesondere Herrn Professor E. A. Weiss; er regte auch diese Arbeit an und unterstützte mich bei ihrer Durchführung.